منطق‌های لوییس

اسداله فلاحی

۸۶/۶/۲۳

منطق‌های لوییس

تاریخچه

در آغاز قرن بیستم و پس از انتشار اثر سه جلدی وایتهد و راسل ۱۹۱۳ – ۱۹۱۰، *مبانی ریاضیات*، که استلزام مادی، در آن، مبنا قرار گرفته و پارادوکس‌های استلزام مادی از آن سر بر آورده بود، سی. آی. لویس، اولین کسی بود که استلزام جدیدی به نام استلزام اکید در برابر استلزام مادی معرفی کرد. استلزام اکید ترکیب ضرورت و استلزام مادی است و بدین سبب، بسیاری از پارادوکس‌های استلزام مادی برای آن برقرار نیستند. لویس، که آثارش در این زمینه، از ۱۹۱۴ آغاز و در ۱۹۳۲ به اوج خود رسید، با پیراستن این پارادوکس‌ها از نظام منطقی معرفی شده در *مبانی ریاضیات*، اولین نظام منطقی برای استلزام اکید را در سال ۱۹۱۸ در دو فصل پایانی کتاب *سیری در منطق* (*Survey Logic*) پی افکند.

نظام Survey

(۱۹۱۸ اصلاح شده در ۱۹۲۰)

	بخش وجهی	بخش کلاسیک
ادات‌های اصلی:	امتناع $\neg$	ناقض $\sim$ و عاطف $\wedge$
تعریف‌ها:	$A \prec B =_{\text{تع}} \neg (A \wedge \sim B)$ $A = B =_{\text{تع}} (A \prec B) \wedge (B \prec A)$	$A \vee B =_{\text{تع}} \sim (\sim A \wedge \sim B)$
اصول موضوعه:	$\neg P \prec \sim P$ $(P \prec Q) \prec (\neg Q \prec \neg P)$ $[(P \prec Q) \wedge (Q \prec R)] \prec (P \prec R)$	$P \prec (P \wedge P)$ $(P \wedge Q) \prec P$ $(P \wedge Q) \prec (Q \wedge P)$ $P \wedge (Q \wedge R) \prec (P \wedge Q) \wedge R$
قواعد:	وضع مقدم اکید: $\vdash A \prec B$ $\vdash A$ ——— $\vdash B$ جانشینی هم‌ارزهای اکید: $\vdash A = B$ ——— $\vdash C [B//A] = C$	معرفی عاطف: $\vdash A$ $\vdash B$ ——— $\vdash A \wedge B$ جانشینی: $\vdash A$ ——— $\vdash A [B/p]$

مقدم و تالی در اصول موضوعهٔ بخش کلاسیک، غیر وجهی هستند اما در اصول موضوعهٔ وجهی، وجهی‌اند. به طور کلی، یک استلزام اکید با مقدم و تالیِ غیروجهی را «استلزام اکید درجه اول» می‌نامند و اصول موضوعه

بخش کلاسیک همگی درجه اول هستند. اگر ادات استلزام را نه به امتناع، بلکه به نفیِ «ترکیب عطفی مقدم و نقیض تالی» تعریف می‌کردیم:

$$A \prec B =_{\text{تع}} \sim (A \wedge \sim B)$$

در آن صورت، بخش کلاسیک اصول و قواعد بالا، برای استنتاج همه توتولوژی‌های منطق کلاسیک، کفایت می‌کرد و دیگر نیازی به بخش وجهی اصول و قواعد بالا نمی‌بود. جایگزین کردن امتناع در تعریف استلزام اکید، وضعیت را دگرگون می‌کند و اصول و قواعد جدید را برای اثبات احکام مورد نیاز دارد.

لویس، بعدها، در برخی از اصول و قضایای این نظام، به طور خاص، در اصل عکس نقیض، به تردید افتاد و به همراه لنگفورد در سال ۱۹۳۲، در فصل پنجم کتاب *منطق نمادی*، دو نظام ضعیف‌تر را برای استلزام اکید مناسب دانست. نظام اول با حذف اصل عکس نقیض از مجموعه اصول بالا و نظام دوم با تضعیف آن به اصل سازگاری $\Diamond (P \wedge Q) \to \Diamond P$، به دست می‌آید. لویس و لنگفورد این دو نظام را به ترتیب، S1 و S2 نامیدند. لویس، در پیوستی در پایان کتاب، برای استلزام اکید، سه نظام دیگر را به نام‌های S3، S4 و S5 معرفی کرد. نظام ***Survey***، با نظام S3 از مجموعه نظام‌های S1 تا S5 برابر بود. هدف لویس این بود که تفاوتِ نظام مطلوب خود، S2، را با نظام ***Survey***، و نظام‌های مشابه بیان کنند.

چنانکه گفتیم، S3 دارای اصل موضوع عکس نقیض بود و لویس و لنگفورد در درستی آن شک داشتند. از این رو، با تضعیف این اصل به اصل سازگاری، $\Diamond (P \wedge Q) \to \Diamond P$، نظام S2 را طراحی کردند. نظام S2، هرچند فاقد اصل موضوع عکس نقیض بود، اما احتمال قضیه بودن آن را نفی نمی‌کرد. قابل اثبات بودن اصل عکس نقیض در S2 بسیار ضعیف می‌نمود؛ اما لویس و لنگفورد، جانب احتیاط را فرو نگذاشتند و ابتدا، با حذف هر دو اصل و تأسیس نظام S1، به استنتاج قضایای این نظام پرداختند. لویس و لنگفورد چهار بخش نخست از فصل پنجم را به این نظام اختصاص داده، به تفصیل، احکام آن را مورد بررسی قرار دادند. آنگاه، در بخش پنجم، به نظام S2، اصل سازگاری و نتایج آن پرداختند. این رویداد یادآور اصل پنجم اقلیدس است که گفته می‌شود، احتمالا، مورد شک خود اقلیدس بوده زیرا ۱۹ قضیه نخست را بدون این اصل اثبات کرده است.

ویلیام پری با دو جدول چهارارزشی زیر، ضعیف‌تر بودن S1 نسبت به S2 و S3 را اثبات کرده بود:

P	$\sim P$	$\neg P$	$\Diamond P$
1	4	4	1
2	3	3	2
3	2	4	1
4	1	2	3

$\prec$	1	2	3	4
1	2	4	3	4
2	2	2	3	3
3	2	4	2	4
4	2	2	2	2

1 و 2 انواعی از صادق و 3 و 4 انواعی از کاذب هستند. بر اساس دو جدول بالا، همه قواعد Survey، صدق‌نگهدار و همه اصول آن، همیشه‌صادق هستند به جز اصل عکس نقیض که وقتی P و Q، به ترتیب، ارزش‌های 2 و 3 بگیرند، ارزش 4 می‌گیرد یعنی به نوعی کاذب است. بنابراین، این اصل از سایر اصول مستقل است. همچنین، اصل سازگاری نیز در همان تعبیر، همین ارزش را می‌گیرد و این اصل نیز از آن اصول مستقل است.

با همه اینها، ضعیف‌تر بودن S2 از S3 ثابت نشده بود و امکان داشت که روزی، تساوی S2 با S3 را کسی اثبات کند که در آن صورت، شک لویس و لنگفورد به S2 نیز سرایت می‌کرد. تفکیک S1 از S2 به دست لویس و لنگفورد به همین منظور انجام شده بود تا در صورت یافته شدن چنین برهانی، نظام از پیش آماده‌ای برای استلزام اکید داشته باشند. تاریخ، اما، عکس این رویداد را ثبت کرد و ویلیام پَری در سال ۱۹۳۴ نشان داد که S2 و S3 مساوی نیستند. جدول‌های ارزش این برهان، اما، به سادگی جدول‌های قبل نبود:

P	$\sim P$	$\neg P$	$\Diamond P$
0	7	6	1
1	6	2	5
2	5	0	7
3	4	0	7
4	3	0	7
5	2	0	7
6	1	0	7
7	0	0	7

$\wedge$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	2	2	0	0	2	2
3	0	1	2	3	0	1	2	3
4	0	0	0	0	4	4	4	4
5	0	1	0	1	4	5	4	5
6	0	0	2	2	4	4	6	6
7	0	1	2	3	4	5	6	7

$\prec$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	6	6	6	6	6	6	6	6
1	2	6	2	6	2	6	2	6
2	0	0	6	6	0	0	6	6
3	0	0	2	6	0	0	2	6
4	0	0	0	0	6	6	6	6
5	0	0	0	0	2	6	2	6
6	0	0	0	0	0	0	6	6
7	0	0	0	0	0	0	2	6

در این جدول، 0 تا 5 انواع کذب و 6 و 7 انواع صدق هستند. همه اصول S2 در این جدول‌ها صادق است اما اصل عکس نقیض در تعبیری که P و Q، به ترتیب، ارزش‌های 1 و 0 گرفته‌اند، ارزش کاذب 0 می‌گیرد. این نشان می‌دهد که این اصل از سایر اصول S2 مستقل است و بنابراین S3 قوی‌تر از S2 است. از این رو، لویس در ویراست دوم کتاب در سال ۱۹۵۹، با اشاره به این رویداد منطقی، نظر نهایی خود مبنی بر پذیرش قطعی S2 برای استلزام اکید را اعلام کرد.

دلایل پی‌ریزی نظام‌های S1، S2 و S3 را شناختیم؛ اما S4 و S5 چرا پدید آمدند؟ چنان که خواهیم گفت، لویس علاقه‌ای به این دو نظام نداشت و آنها را برای بیان قواعد و اصول استلزام اکید کاملا نامناسب می‌دانست؛ زیرا در این دو نظام، علاوه بر $P \prec (Q \vee \sim Q)$ و $P \prec (Q \rightarrow Q)$، دو گزاره $P \prec \Box (Q \vee \sim Q)$ و $P \prec (Q \prec Q)$ نیز قضیه هستند. دو فرمول اول همان پارادوکس‌های استلزام اکید هستند و می‌گویند گزاره‌های ضروری از هر گزاره‌ای نتیجه می‌شود؛ اما دو فرمول دوم پارادوکس‌های قوی‌تری هستند و بر اساس آنها، ضرورتِ گزاره‌های ضروری از هر گزاره‌ای نتیجه می‌شود. لویس هرچند دو پارادوکس اول را می‌پذیرد اما به دو پارادوکس دوم، تن در نمی‌دهد. به نظر لویس، گزاره‌های اتفاقی و غیر ضروری می‌توانند گزاره‌های ضروری را نتیجه دهند اما ضرورت آنها را نمی‌توانند. استنتاج ضرورت از گزاره غیر ضروری، به نظر لویس، مغالطه است.

(در نظام S3، هر چند $P \prec (Q \prec Q)$ اثبات نمی‌شود اما $(P \prec R) \prec (Q \prec Q)$ قابل اثبات است. این فرمول به مغالطه لویس گرفتار نیست اما پارادوکسی به نظر می‌رسد. استنتاج ضرورتِ یک گزارهٔ بدیهی منطقی از یک گزاره ضروری اما غیرمنطقی چندان کمتر از استنتاج ضرورت از یک گزاره غیرضروری نیست. شاید لویس به دلیل همین ملاحظات بوده که نظام S3 را به سود S2 کنار نهاده است.)

چنان که دیدیم، طرح نظام‌های S4 و S5 دلیل فلسفی خاصی نداشت و لویس و لنگفورد آن دو را تنها به دلایل صوری و چنان که گفتیم، در یک پیوست در پایان کتاب آوردند. اسکار بِکِر در ۱۹۳۰ اثبات کرده بود که در نظام Survey، یعنی همان S3، با افزودن اصل $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ یا $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ (یا اصل اول به همراه اصل براور، $A \rightarrow \Box\Diamond A$) به این نظام، این تعداد، به ترتیب، به ۱۴ و ۶ کاهش می‌یابد. لویس، با توجه به این مسئله، این دو اصل را به S3 افزود و زنجیره‌ای از نظام‌ها را به وجود آورد.

لویس و لنگفورد بحث و بررسی بیشتر این نظام‌ها را پس از ۱۹۳۲ رها کردند اما منطق‌دانان بسیاری به آن علاقه‌مند شده و به بازسازی این نظام‌ها و برساختن نظام‌های مشابه اقدام کردند. فیز در ۱۹۳۷ نظام T را معرفی کرد و ویلیام پِری در ۱۹۳۹ نشان داد که ۴۲ جهت ناهم‌ارز در نظام Survey، یعنی همان S3، وجود دارد (این تعداد در S1 و S2 نامتناهی است) و با افزودن اصل $\Box A \to \Box\Box A$ یا $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ به این نظام، این تعداد، به ترتیب، به ۱۴ و ۶ کاهش می‌یابد. لمون در ۱۹۵۷، نظام‌های لویس را بر پایه منطق کلاسیک بازسازی کرد و نظام‌های ضعیف‌تری را به نام‌های E2 تا E5 در برابر S2 تا S5 به وجود آورد.

تا ۱۹۵۹، این نظام‌ها، و به طور کلی، منطق موجهات، تنها به روش برهانی مورد بررسی منطق‌دانان بودند و سمانتیک مناسبی برای آنها وجود نداشت. در این سال، کریپکی برای S5 و در ۱۹۶۳، برای S4 و در ۱۹۶۵، برای S3 و S2، سمانتیک مناسب را فراهم آورد. در نهایت، کرسول در ۱۹۷۲، سمانتیک S1 را معرفی نمود. در این میان، سگربرگ، در ۱۹۷۱، سمانتیک مناسبی را برای نظام‌های لمون و بسیاری دیگر از نظام‌ها، در رساله دکتری خود گرد آورده بود. این نظام‌ها در چلس ۱۹۸۰ و چلس و سگربرگ ۱۹۹۶ سمانتیک ساده شده‌ای را پذیرفتند که کتاب حاضر دین بزرگی به آنها دارد.

نظام‌های S4 و S5 نظام‌های معروفی هستند که آشنایان با منطق موجهات آن دو را به خوبی می‌شناسند. S1، S2 و S3، اما، چنین نبوده و بسیار کمتر شناخته شده‌اند. از سوی دیگر، این نظام‌ها درآمدی به آثار منطق‌دانانی از ربط مانند ویلهلم آکرمان بودند که با پیراستن نظام S3 به نظام انتاج E رسید. از این رو، با نگاهی گذرا به نظریه برهان و سمانتیک این سه نظام، آنها را با منطق‌های ربط مقایسه می‌کنیم.

در دو نظام اصل موضوعی برای نظام‌های S1 تا S5 (از لویس و لنگفورد ۱۹۳۲ و لمون۱۹۵۷)، استلزام اکید یک عملگر فرعی است و با ادات‌های وجهی ضرورت یا امکان تعریف می‌شود. (در نظام Survey، استلزام اکید با ادات امتناع تعریف شده بود.) لویس و لنگفورد ۱۹۳۲، که استلزام اکید را با ادات امکان تعریف کرده بودند، با این وجود، همه اصل موضوع‌های S1 را با استلزام اکید بیان می‌کنند و سپس همه احکام امکان در این نظام و نیز همه توتولوژی‌ها را نتیجه می‌گیرند. به نظر می‌رسد که لویس و لنگفورد، گویی، لقمه از قفا برگرفته‌اند و قوانین عملگرهای اصلی (عملگرهای امکان، ناقض و عاطف) را از طریق قوانین عملگر فرعی استلزام اکید به دست آورده‌اند. این وضعیت معکوس را لمون ۱۹۵۷ اصلاح کرد و با بیان اصول موضوعه برای عملگر ضرورت و عملگرهای تابع ارزشی، قوانین استلزام اکید را نتیجه گرفت. در این روش، ابتدا منطق کلاسیک گزاره‌ها طرح می‌شود و سپس با افزودن عملگر ضرورت و اصول موضوعه‌ای برای آن، احکام استلزام اکید نتیجه می‌شود.

چنان که گفتیم، در هر دو روش بالا، استلزام اکید عملگری فرعی است. در ۱۹۵۶، منطق‌دانانی مانند لمون، پرایر، مردیت و توماس به این فکر افتادند منطق‌های لویس را با استلزام به عنوان عملگری اصلی بازسازی کنند. این منطق‌دانان به بخش استلزام اکیدی نظام‌های لویس علاقه‌مند بودند و در سال ۱۹۵۷، اصول موضوعه استلزام اکیدیِ S5 را به چند روش به دست دادند. بعدها، یان هکینگ در ۱۹۶۳ موفق شد بخش استلزام اکید S4 و S3 را به دست آورد و گویا، تا کنون، کسی موفق به یافتن بخش استلزام اکیدیِ نظام‌های S1 و S2 نشده است. در زیر، نظام‌های لویس را به هر سه روش یاد شده بیان می‌کنیم.

S1

نظام S1: صورت‌بندی اول از لویس و لنگفورد ۱۹۳۲

	بخش وجهی	بخش کلاسیک
ادات‌های اصلی:	امکان $\Diamond$	ناقض ~ و عاطف $\wedge$
تعریف‌ها:	$A \prec B =_{تع} \sim\Diamond (A \wedge \sim B)$ $A = B =_{تع} (A \prec B) \wedge (B \prec A)$ $\Box A =_{تع} \sim \Diamond \sim A$	$A \vee B =_{تع} \sim (\sim A \wedge \sim B)$
اصول موضوعه:	وضع مقدم اکید: $[P \wedge (P \prec Q)] \prec Q$ تعدی استلزام اکید: $[(P \prec Q) \wedge (Q \prec R)] \prec (P \prec R)$	$P \prec (P \wedge P)$ $(P \wedge Q) \prec P$ $(P \wedge Q) \prec (Q \wedge P)$ $P \wedge (Q \wedge R) \prec (P \wedge Q) \wedge R$
قواعد:	وضع مقدم اکید: $\vdash A \prec B$ $\vdash A$ ——— $\vdash B$ جانشینی هم‌ارزهای اکید: $\vdash A = B$ ——— $\vdash C [B//A] = C$	معرفی عاطف: $\vdash A$ $\vdash B$ ——— $\vdash A \wedge B$ جانشینی: $\vdash A$ ——— $\vdash A [B/p]$

اگر ادات استلزام را بدون امکان، به صورت کلاسیک زیر، تعریف می‌کردیم:

$$A \prec B =_{تع} \sim (A \wedge \sim B)$$

بخش کلاسیک اصول و قواعد بالا برای استنتاج همه توتولوژی‌های منطق کلاسیک کفایت می‌کرد و دیگر نیازی به بخش وجهی اصول و قواعد بالا نمی‌بود. افزودن امکان در تعریف استلزام اکید، وضعیت را دگرگون می‌کند و اصول و قواعد جدید را برای اثبات احکام مورد نیاز دارد. اثبات این احکام نسبتا دشوار است و ما در تمرین زیر، ترتیب اثبات قضایا و قواعد را می‌آوریم تا خواننده علاقه‌مند، خود، بتواند احکام مورد نیاز را اثبات کند.

تمرین:

قواعد و قضایای زیر را در منطق S1 اثبات کنید:

قواعد:

قاعده هم‌ارزی اکید:

$\vdash A \prec B$
$\vdash B \prec A$
———
$\vdash A = B$

قاعده تعدی:

$\vdash A \prec B$
$\vdash B \prec C$
———
$\vdash A \prec C$

قضایا:

$P = (P \wedge P)$

1. $P \prec P$
2. $(P \wedge Q) = (Q \wedge P)$
3. $(\sim P \prec Q) \prec (\sim Q \prec P)$
4. $(\sim P \prec Q) = (\sim Q \prec P)$
5. $\sim P \prec \sim P$
6. $\sim \sim P \prec P$
7. $\sim \sim \sim P \prec \sim P$
8. $\sim \sim \sim \sim P \prec \sim \sim P$
9. $\sim \sim \sim \sim P \prec P$
10. $\sim P \prec \sim \sim \sim P$
11. $\sim P = \sim \sim \sim P$
12. $P \prec P$
13. $\sim \Diamond (P \wedge \sim P)$
14. $\sim \Diamond (P \wedge \sim \sim \sim P)$
15. $P \prec \sim \sim P$
16. $P = \sim \sim P$
17. $(P \prec \sim Q) \prec (Q \prec \sim P)$
18. $(P \prec Q) \prec (\sim Q \prec \sim P)$
19. $(\sim P \prec \sim Q) \prec (Q \prec P)$
20. $(P \prec \sim Q) = (Q \prec \sim P)$
21. $(P \prec Q) = (\sim Q \prec \sim P)$
22. $(\sim P \prec \sim Q) = (Q \prec P)$
23. $(P \wedge Q) \wedge R \prec P \wedge (Q \wedge R)$
24. $P \wedge (Q \wedge R) = (P \wedge Q) \wedge R$
25. $(P \vee P) \prec P$
26. $P \prec (P \vee Q)$
27. $(P \vee Q) \prec (Q \vee P)$
28. $P \vee (Q \vee R) \prec (P \vee Q) \vee R$
29. $\Box P = \sim \Diamond \sim P$
30. $\Diamond P = \sim \Box \sim P$
31. $\sim \Box P = \Diamond \sim P$
32. $\sim \Diamond P = \Box \sim P$
33. $\Box P = \sim \Diamond (\sim P \wedge \sim P)$
34. $\Box P = (\sim P \prec P)$
35. $[\sim P \wedge (\sim P \prec P)] \prec P$
36. $\sim \Diamond \{ [\sim P \wedge (\sim P \prec P)] \wedge \sim P \}$
37. $\sim \Diamond \{ (\sim P \prec P) \wedge (\sim P \wedge \sim P) \}$
38. $\sim \Diamond \{ (\sim P \prec P) \wedge \sim P \}$
39. $(\sim P \prec P) \prec P$
40. $\Box P \prec P$
41. $(P \prec Q) = \Box (P \supset Q)$
42. $((P \wedge Q) \prec R) = (P \prec (Q \supset R))$
43. $((P \wedge Q) \prec R) = (P \prec (\sim Q \vee R))$

نظام S1: صورت‌بندی دوم از لمون ۱۹۵۷

	بخش وجهی	بخش کلاسیک
ادات‌های اصلی:	ضرورت $\Box$	ناقض ~ و شرطی مادی $\supset$
تعریف‌ها:	$A \prec B =_{\text{تع}} \Box (A \supset B)$ $A = B =_{\text{تع}} (A \prec B) \wedge (B \prec A)$ $\Diamond A =_{\text{تع}} \sim \Box \sim A$	
اصول موضوعه:	وضع مقدم اکید: $[P \wedge (P \prec Q)] \supset Q$ تعدی استلزام اکید: $[(P \prec Q) \wedge (Q \prec R)] \supset (P \prec R)$	همه توتولوژی‌های کلاسیک
قواعد:	ضرورت اصول موضوعه: $\dfrac{A \in \text{Axioms}}{\vdash \Box A}$	وضع مقدم مادی: $\dfrac{\vdash A \supset B \quad \vdash A}{\vdash B}$ جانشینی: $\dfrac{\vdash A}{\vdash A[B/p]}$

S2 تا S5

لویس و لنگفورد ۱۹۳۲ نظام‌های S2 و S3 را، به ترتیب، با افزودن اصل سازگاری

$$\Diamond (P \wedge Q) \prec \Diamond P$$

و اصل

$$(P \prec Q) \prec (\sim \Diamond Q \prec \sim \Diamond P)$$

به S1 تعریف می‌کنند. لمون ۱۹۵۷ نظام‌های S2 و S3 را، به ترتیب، با افزودن قاعده و اصل یکنواختی به S1 به دست می‌آورد:

قاعده یکنواختی:

$$\frac{\vdash A \supset B}{\vdash \Box A \supset \Box B}$$

اصل موضوع یکنواختی:

$$(A \prec B) \prec (\Box A \prec \Box B)$$

در این دو کتاب، S4 و S5، به ترتیب با افزودن اصل‌های 4 و 5 به S1 و S4 تعریف شده‌اند. مردیت ۱۹۵۶روش متفاوتی را برای S5 کشف کرده است و آن اینکه استلزام اکید را عملگر اصلی قرار می‌دهد و بخش استلزام اکیدی نظام S5 را به دست می‌آورد:

بخش استلزام اکیدی S5

صورت‌بندی نخست		صورت‌بندی دوم	
		I	$A \prec A$
K′	$A \prec (C \prec C)$	B′	$(A \prec B) \prec ((B \prec C) \prec (A \prec C))$
S#	$(((A \prec B) \prec C) \prec B) \prec ((B \prec D) \prec (A \prec D))$	W#	$(((A \prec B) \prec C) \prec B) \prec (A \prec B)$

صورت‌بندی سوم		صورت‌بندی چهارم
K′	$A \prec (C \prec C)$	
S	$((A \prec (B \prec C)) \prec ((A \prec B) \prec (A \prec C))$	
P!	$(((A \prec B) \prec C) \prec (A \prec B)) \prec (A \prec B)$	

در همان سال، لمون حدس زد که بخش استلزام اکیدی نظام‌های S3 و S4 را بتوان به صورت زیر اصل موضوعی کرد:

بخش استلزام اکیدی S4		بخش استلزام اکیدی S3	
K′	$A \prec (C \prec C)$	K′!	$(A \prec B) \prec (C \prec C)$
B′	$(A \prec B) \prec ((B \prec C) \prec (A \prec C))$	B′	$(A \prec B) \prec ((B \prec C) \prec (A \prec C))$
W	$((A \prec B) \prec B) \prec (A \prec B)$	W	$((A \prec B) \prec B) \prec (A \prec B)$

یان هکینگ در ۱۹۶۳ حدس لمون را به همراه دو حکم زیر اثبات کرد:

بخش استلزام اکیدی T		بخش استلزام اکیدی S2	
K′	$A \prec (C \prec C)$	K′!	$(A \prec B) \prec (C \prec C)$
S	$((A \prec (B \prec C)) \prec ((A \prec B) \prec (A \prec C))$	S	$((A \prec (B \prec C)) \prec ((A \prec B) \prec (A \prec C))$
RB′	$\dfrac{\vdash A \prec B}{\vdash (B \prec C) \prec (A \prec C)}$	RB′	$\dfrac{\vdash A \prec B}{\vdash (B \prec C) \prec (A \prec C)}$
RB	$\dfrac{\vdash A \prec B}{\vdash (C \prec A) \prec (C \prec B)}$	RB	$\dfrac{\vdash A \prec B}{\vdash (C \prec A) \prec (C \prec B)}$

تمرین:

۱. نشان دهید که دو صورت‌بندی نظام S1 هم‌ارزند.

۲. نشان دهید که صورت‌بندی‌های گوناگون S2 تا S5 هم‌ارزند.

۳. نشان دهید که S2 را با افزودن هر یک از این اصل‌ها به S1 می‌توان به دست آورد:

$\Box A \prec \Box (A \vee B)$ $\quad\quad$ $\Box (A \wedge B) \prec \Box A$

$\Diamond A \prec \Diamond (A \vee B)$ $\quad\quad$ $\Diamond (A \wedge B) \prec \Diamond A$

۴. نشان دهید که S3 را با افزودن هر یک از این اصل‌ها به S1 می‌توان به دست آورد:

$\Box A \prec (B \prec A)$

$\Box A \prec (\Box (B \prec B) \prec \Box A)$

$\Box A \prec \Box (\Box (B \prec B) \supset \Box A)$

$\Box A \prec \Box (\Box A \vee \Box B)$

۵. نشان دهید که منطق انتاج، E، به همراه $((C \prec C) \prec (A \prec B)$ معادل S3 است.

۶. نشان دهید که منطق انتاج، E، به همراه $(C \prec C) \prec A$ معادل S4 است.

۷. نشان دهید که S1 با هر یک از اصل‌های زیر معادل S4 است:

$A \prec (B \prec B)$

$\Box A \prec \Box \Box A$

$\Box A \prec \Box (\Box B \supset \Box A)$

$\Box A \prec \Box (\Box A \vee \Diamond B)$