۱۴/مهر/۸۶

منطق‌های وجهی

مقدمه

منطق‌های نرمال و غیرنرمال

منطق‌های نرمال شناخته شده‌ترین بخش منطق موجهات هستند و نظام‌های K ، D ، T ، B ، S4 ، S5 ، Triv و Ver آشناترین منطق‌های نرمال برای نوآموزان منطق وجهی به شمار می‌رود. نظام وجهی K ، که نباید با منطق کلاسیک گزاره‌های K اشتباه گرفته شود، ضعیف‌ترین منطق نرمال است. منطق نرمال منطقی است که شامل اصل K ،

$$\Box (A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$$

بوده، همه قضایایش ضروری باشد.

بسیاری از منطق‌های وجهی «غیر نرمال» هستند؛ یعنی یا اصل K قضیه آنها نیست یا برخی از قضایایشان ضروری نیست. منطق‌های غیر نرمال به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: دسته اول ضعیف‌تر از K و دسته دوم در عرض K هستند.

بسیاری از منطق‌های وجهی وجود دارد که حتی از K نیز ضعیف‌ترند مانند منطق کلاسیک C ، منطق یکنواخت M و منطق منتظم R . هیچ کدام از این سه منطق، قضیه‌ای ضروری ندارند و منطق‌های C و M فاقد اصل K به عنوان قضیه هستند. از دیگر منطق‌های ضعیف‌تر از K، می‌توان به منطق‌های N و P اشاره کرد که مانند K، منطق ضروری هستند و مانند منطق‌های C و M، اصل K در آنها قضیه نیست.

منطق‌های لویس و شبه‌منطق‌ها

بسیاری دیگر از منطق‌های وجهی غیر نرمال در عرض K قرار داشته، نسبت به آن، نه ضعیف‌ترند نه قوی‌تر. نظام‌های استلزام اکید لویس، S1 ، S2 و S3 در این دسته دوم قرار دارند و چنان که خواهیم دید، تنها در برخی قضایا با K مشترک‌اند. نظام‌های S4 و S5 ، همان طور که گفتیم نرمال هستند.

نظام S1 شباهت بسیاری به منطق کلاسیک CX دارد و در حقیقت، گسترش آن است و S2 و S3 نیز به منطق منتظم R شباهت داشته، آن را گسترش داده‌اند. از این رو، منطق S1 را «شبه کلاسیک» و منطق‌های S2 و S3 را «شبه منتظم» نامیده‌اند. «شبه منطق»ها تعریفی دقیق و ریاضی دارند که بعدا، به آن اشاره خواهد شد. اکنون، تنها به معرفی غیر دقیق «شبه‌منطق» می‌پردازیم: شبه منطق‌ها گسترش قضایای منطق هستند نه گسترش قواعد آن؛ یعنی، برای نمونه، منطق‌های شبه کلاسیک گسترش قضایای منطق کلاسیک C هستند یعنی همه قضایای C را به عنوان قضیه دارند اما قاعده اصلی C در آنها برقرار نیست. منطق‌های شبه منتظم، نیز، گسترش قضایای منطق منتظم R هستند یعنی همه قضایای R را به عنوان قضیه دارند اما قاعده اصلی R در آنها برقرار نیست.

با شناخت منطق‌های C و R ، اثبات و ابطال قضایا و قواعد در نظام‌های استلزام اکید لویس، S1 ، S2 و S3 بسیار آسان می‌شود و این کمک بزرگی به فهم عمیق از آنهاست.

نظام‌های وجهی غیر نرمال، هم از جهت سمانتیک و هم از جهت نظریه برهان، به منطق‌های ربط بسیار نزدیک و از همسایه‌های منطق ربط R به شمار می‌روند. برای نمونه، سه منطق از منطق‌های لویس، S1 ، S2 و S3 تقریبا با همان دغدغه‌های منطق‌دانان ربط پدید آمدند و شباهت فراوانی میان آنها و منطق‌های ربط وجود دارد. از سوی دیگر، ویلهلم آکرمان منطق انتاج خود، (که معادل نظام E از اندرسون و بلنپ است)، در راستای اصلاح و تکمیل کارهای لویس انجام داد و چنان که اثبات شده است، منطق Π' (و E) ضعیف‌تر از S3 بوده و درون آن قرار می‌گیرد.

اکنون، به بیان قواعد این منطق‌ها می‌پردازیم:

منطق‌های پایه

منطق $PC^{\Box}$

در منطق گزاره‌ها، PC، برای ادات‌های وجهی، مانند ضرورت، امکان و امتناع، هیچ نمادی قرارداد نشده است. از این رو، منطق‌گزاره‌ها توانایی بیان گزاره‌های ضروری و امکانی را ندارد و در نتیجه، نمی‌تواند قوانین و قواعد حاکم بر این گزاره‌ها را نیز بیان کند. بنابراین، ناگزیریم ابتدا، زبان PC را تقویت کنیم و سپس قوانین منطق موجهات را بیان کنیم.

هر یک از سه مفهوم ضرورت، امکان و امتناع را می‌توان با دو مفهوم دیگر تعریف کرد. برای نمونه، امکان (عام) را به «سلب ضرورت از طرف مخالف» و امتناع را به «عدم امکان» و ضرورت را به «امتناع عدم» تعریف کرده‌اند. بنابراین، کافی است یکی از این سه مفهوم را به صورت تعریف‌نشده به منطق خود بیفزاییم و دو مفهوم دیگر را بر اساس آن تعریف کنیم. در اینجا، مانند بسیاری از کتاب‌های دیگر، مفهوم ضرورت را تعریف‌نشده در نظر می‌گیریم.

اگر به واژگان زبان منطق گزاره‌ها، نماد $\Box$ را برای ضرورت بیفزاییم و نمادهای $\Diamond$ و $\neg$ را به معنای ضرورت، امکان و امتناع گرفته، $\Diamond A$ را به $\sim\Box\sim A$ (یعنی سلب ضرورت از طرف مخالف) و $\neg A$ را به $\Box\sim A$ (یعنی ضرورت طرف مخالف) تعریف کنیم و برای آنها، هیچ قاعده استنتاجی بیان نکنیم، تنها زبان منطق گزاره‌ها را تقویت کرده‌ایم. مناسب است که ادات‌های شرطی ضروری و دوشرطی ضروری را، که اولی معادل «شرطی لزومی» از منطق قدیم است، نیز تعریف شود:

امکان	$\sim\Box\sim A$	$=_{\text{تع}}$	$\Diamond A$
امتناع	$\sim\Diamond A$	$=_{\text{تع}}$	$\neg A$
استلزام اکید	$\Box(A \rightarrow B)$	$=_{\text{تع}}$	$A \prec B$
هم‌ارزی اکید	$\Box(A \leftrightarrow B)$	$=_{\text{تع}}$	$A = B$

در $PC^{\Box}$، قضایای جدیدی حاصل می‌شود که همگی نمونه‌جانشین قضایای PC اند:

نقض جهت (قسم اول)	نقض مضاعف
$\Diamond A \leftrightarrow \sim\Box\sim A$	$\Box A \leftrightarrow \sim\sim\Box A$
$\sim\Diamond A \leftrightarrow \Box\sim A$	$\Diamond A \leftrightarrow \sim\sim\Diamond A$
$\neg A \leftrightarrow \Box\sim A$	$\Diamond A \leftrightarrow \sim\neg A$

دو نکته:

۱. برخی از قضایای بالا، به نظر می‌رسد که نمونه‌جانشین هیچ قضیه منطق گزاره‌ها نیست، برای نمونه، $\sim\Diamond A \leftrightarrow \Box\sim A$ به هیچ یک از توتولوژی‌های PC شبیه نیست. برای این موارد، باید نمادها را بر اساس تعریفشان بازنویسی کنید: $\sim\sim\Box\sim A \leftrightarrow \Box\sim A$.

۲. گزاره‌هایی مانند $\Box A \leftrightarrow \Box\sim\sim A$، علی رغم ظاهر فریبنده‌شان، نمونه‌جانشین هیچ قضیه PC نیستند و بنابراین قضیه $PC^{\Box}$، نیز نمی‌توانند باشند. در اینجا، نمی‌توان قاعده نقض مضاعف را در جزء فرمول به کار برد.

شاید، نکته دوم، با یک قاعده مهم از منطق گزاره‌ها، به نام «جانشینی هم‌ارزها»، متعارض به نظر برسد: بر اساس این قاعده، همه قواعد دوطرفه (مانند نقض مضاعف) در جزء فرمول می‌توانند به کار روند.

در توضیح، باید گفت که قاعده جانشینی هم‌ارزها قاعده‌ای فرعی است و قواعد فرعی به دو قسم «اثبات‌پذیر» (derivable) و «پذیرفتنی» (admisible) تقسیم می‌شوند. قواعد فرعی اثبات‌پذیر، تنها به کمک قواعد اصلی اثبات می‌شوند و از این رو، تعمیم‌پذیرند و در گسترش‌های نظام منطقی، قابل اثبات باقی می‌مانند. این در حالی است که قواعد فرعی پذیرفتنی، تنها به کمک قواعد اصلی اثبات نمی‌شوند و برخی ویژگی‌های خاصِ نظام منطقی در اثبات آنها دخالت دارد. به همین دلیل، قواعد پذبرفتنی تعمیم‌ناپذیرند و در گسترش‌هایی از نظام منطقی که آن ویژگی‌های خاص را از دست می‌دهند قابل اثبات نخواهند بود.

قاعده جانشینی هم‌ارزها، در منطق گزاره‌ها، قاعده‌ای پذیرفتنی است و اثبات آن از این ویژگی خاص PC سود می‌جوید که قاعده جانشینی هم‌ارزها برای همه ادات‌های آن برقرار است. این ویژگی خاص، در منطق $PC^{\Box}$، از بین می‌رود زیرا در این منطق، ادات جدید $\Box$ افزوده شده و هیچ قاعده‌ای برای آن معرفی نشده است و از این رو، قاعده جانشینی هم‌ارزها برای ادات $\Box$ برقرار نیست؛ در نتیجه، این قاعده، به طور کلی نمی‌تواند در $PC^{\Box}$ برقرار باشد.

منطق کلاسیک *C*

اگر در $PC^{\Box}$ اجازه دهیم که قواعد دوطرفه بتوانند در جزء فرمول‌ها به کار روند (از جمله، در جزء فرمول‌های موجود در دامنه $\Box$)، به ضعیف‌ترین منطق وجهی، یعنی منطق وجهی کلاسیک C می‌رسیم.

در این منطق، به آسانی می‌توان قضایای زیر را اثبات کرد:

نقض جهت (قسم اول)

$\Diamond A \leftrightarrow \sim\Box\sim A$
$\sim\Diamond A \leftrightarrow \Box\sim A$
$\neg A \leftrightarrow \Box\sim A$

نقض مضاعف بیرونی

$\Box A \leftrightarrow \sim\,\sim\Box A$
$\Diamond A \leftrightarrow \sim\,\sim\Diamond A$
$\Diamond A \leftrightarrow \sim\,\neg A$

نقض جهت (قسم دوم)

$\Box A \leftrightarrow \neg\,\sim A$
$\Box A \leftrightarrow \sim\Diamond\sim A$
$\sim\Box A \leftrightarrow \Diamond\sim A$

نقض مضاعف درونی

$\Box A \leftrightarrow \Box\sim\,\sim A$
$\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\sim\,\sim A$

نقض جهت و دمورگان

$\sim\Box\,(A \wedge B) \leftrightarrow \Diamond\,(\sim A \vee \sim B)$
$\sim\Box\,(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond\,(\sim A \wedge \sim B)$
$\sim\Diamond\,(A \vee B) \leftrightarrow \Box\,(\sim A \wedge \sim B)$
$\sim\Diamond\,(A \wedge B) \leftrightarrow \Box\,(\sim A \vee \sim B)$

جابجایی

$\Box\,(A \wedge B) \leftrightarrow \Box\,(B \wedge A)$
$\Box\,(A \vee B) \leftrightarrow \Box\,(B \vee A)$
$\Diamond\,(A \vee B) \leftrightarrow \Diamond\,(B \vee A)$
$\Diamond\,(A \wedge B) \leftrightarrow \Diamond\,(B \wedge A)$

عکس نقیض

$\Box\,(A \rightarrow B) \leftrightarrow \Box\,(\sim B \rightarrow \sim A)$
$\Diamond\,(A \rightarrow B) \leftrightarrow \Diamond\,(\sim B \rightarrow \sim A)$
$\Box\Diamond\,(A \rightarrow B) \leftrightarrow \Box\Diamond\,(\sim B \rightarrow \sim A)$
$\Diamond\Diamond\Box\Diamond\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond\,(A \rightarrow B) \leftrightarrow$
$\Diamond\Diamond\Box\Diamond\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond\,(\sim B \rightarrow \sim A)$

عکس نقیض	$(A \prec B) \leftrightarrow (\sim B \prec \sim A)$
انقباض	$[A \prec (A \rightarrow B)] \leftrightarrow (A \prec B)$
جذب	$[A \prec (A \wedge B)] \leftrightarrow (A \prec B)$
صدور	$[(A \wedge B) \prec C] \leftrightarrow [A \prec (B \rightarrow C)]$

چنان که می‌بینیم، هیچ یک از قضایای بالا، ضروری نیستند. دو قاعده زیر نیز دو قاعده اساسی در منطق C است:

قاعده هم‌ارزی امکان

$$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Diamond A \leftrightarrow \Diamond B}$$

قاعده هم‌ارزی ضرورت

$$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$$

منطق یکنواخت *M*

در این منطق، علاوه بر برهانک‌های فرضی، برهانک‌های وجهی نیز خواهیم داشت. برهانک وجهی را با یک خط راست عمودی نشان می‌دهیم که یک نماد □ یا ◊ در سمت چپ بالای آن قرار دارد. فرمول‌های وجهی می‌توانند به این برهانک‌ها وارد و از آنها خارج شوند. نماد وجهی، هنگام ورود، حذف و هنگام خروج، معرفی می‌شود. این قواعد حذف و معرفی را ما قواعد ورود و خروج می‌نامیم:

برهانک / قاعده	برهانک ضروری	برهانک امکانی
ورود به سطر اول	$\Box A$ $\Box \mid A$	$\Diamond A$ $\Diamond \mid A$
خروج	$\Box \mid$ $\mid A$ $\therefore\ \Box A$	$\Diamond \mid$ $\mid A$ $\therefore\ \Diamond A$

نکات:

۱. در سطرهای غیر اولِ برهانک‌های وجهی، همه قواعد وجهی و همه قواعد اصلی و فرعی منطق گزاره‌ها می‌توانند به کار رود. از مهم‌ترین این قواعد، می‌توان به قاعده معرفی قضیه، قاعده فرض، قاعده دلیل شرطی، قاعده وضع مقدم، قاعده برهان خلف و دیگر قواعد اشاره نمود.

۲. پایان برهانک وجهی به معنای بسته شدن آن است و دیگر نمی‌توان قاعده‌ای را بر فرمول‌های آن به کار برد (مگر البته قاعده خروج که در حقیقت، قاعده‌ای به روی کل برهانک به شمار می‌رود نه قاعده‌ای به درون آن.)

۳. درون برهانک‌های وجهی، می‌توان برهانک‌های تودرتوی وجهی یا غیروجهی ساخت.

۴. قواعد دومقدمه‌ای نمی‌توانند بر دو فرمول اعمال شوند که یکی درون برهانک وجهی و دیگری بیرون آن باشد. برای نمونه، کاربرد معرفی عاطف در برهان زیر نادرست است:

$$\begin{array}{l|l} \Box & \\ & A \\ & \begin{array}{l|l} \Box & \\ & B \\ & A \wedge B \end{array} \\ \therefore & \end{array}$$

۵. منطق M گسترش منطق $PC^{\Box}$ است اما می‌توان در آن، قاعده فرعی «جانشینی هم‌ارزها» را اثبات کرد. بنابراین، قواعد دوطرفه در جزء فرمول‌های وجهی و غیر وجهی به کار می‌روند و از این رو، منطق یک‌نواخت M، شامل منطق کلاسیک C است.

در M ، بسیاری از قضایا را می‌توان اثبات کرد که قضیهٔ C نیستند:

$\Box (A \wedge B) \to \Box A$	$\Box A \to \Box (A \vee B)$
$\Box (A \wedge B) \to \Box B$	$\Box A \to \Box (A \vee B)$
$\Diamond (A \wedge B) \to \Diamond A$	$(\Diamond A \to \Diamond (A \vee B)$
$\Diamond (A \wedge B) \to \Diamond B$	$\Diamond A \to \Diamond (A \vee B)$
$\Box (A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$	$(\Box A \vee \Box B) \to \Box (A \vee B)$
$\Diamond (A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$	$(\Diamond A \vee \Diamond B) \to \Diamond (A \vee B)$
$(\Diamond A \to \Box B) \to \Box (A \to B)$	$(\Box A \to \Diamond B) \to \Diamond (A \to B)$
$(\Diamond A \to \Box A) \to \Box (A \to A)$	$(\Box A \to \Diamond A) \to \Diamond (A \to A)$
$(\Diamond A \to \Box A) \to \Box (B \to B)$	$(\Box A \to \Diamond A) \to \Diamond (B \to B)$
$\Diamond (A \downarrow B) \to (\Box A \downarrow \Box B)$	$(\Box A \uparrow \Box B) \to \Diamond (A \uparrow B)$
$\Box (A \downarrow B) \to (\Diamond A \downarrow \Diamond B)$	$(\Diamond A \uparrow \Diamond B) \to \Box (A \uparrow B)$
$\Box A \to (B \prec A)$	$\Box A \to (B \prec (C \to C))$
$\Box \sim A \to (A \prec B)$	$\Box A \to (B \prec B)$
$\Box A \to ((B \wedge \sim B) \prec C)$	$\Diamond A \to \Diamond (B \to B)$

چنان که می‌بینید، در این منطق نیز هیچ قضیه ضروری یا ممکن نداریم.

دو قاعده زیر، دو قاعده اساسی در منطق M به شمار می‌رود:

قاعده استلزام ضرورت

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B}$$

قاعده استلزام امکان

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \Diamond A \to \Diamond B}$$

منطق منتظم *R*

علاوه بر دو قاعده ورود به سطر اول و دو قاعده خروج، در این منطق، فرمول‌های ضروری می‌توانند به سطرهای غیر اول برهانک‌های وجهی وارد شوند:

برهانک / قاعده	برهانک ضروری	برهانک امکانی
ورود ضروری به سطر غیر اول	$\Box A$ $\Box$ | $\therefore$ | A	$\Box A$ $\Diamond$ | $\therefore$ | A

در R ، اصل K و قضایای بسیاری قابل اثبات است:

K $\quad \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ اصل K برای ضرورت

$\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$ اصل K برای امکان

X $\quad [\Box(A \to B) \wedge \Box(B \to C)] \to \Box(A \to C)$ اصل X

$$[\Box(A \to B) \wedge \Box(A \wedge C)] \to \Box(B \wedge C)$$
$$[\Box(A \to B) \wedge \Box(A \vee C)] \to \Box(B \vee C)$$
$$[\Box(A \to B) \wedge \Box(\sim A \to B)] \to \Box B$$
$$[\Box(A \to B) \wedge \Box(A \to \sim B)] \to \Box \sim B$$
$$[\Box(A \wedge B \to C) \wedge \Box B] \to \Box(A \to C)$$
$$[\Box(A \to B) \vee \Box(C \to D)] \to [\Box(A \wedge C)] \to \Box(B \vee C)]$$
$$[\Box(A \to B) \wedge \Box(C \to D)] \to [\Box(A \vee C)] \to \Box(B \vee C)]$$
$$[(\Box A \to A) \wedge (\Box A \to \Box\Box A) \wedge (A \to \Box\Diamond A)] \to \Box(\Box A \wedge \Diamond A)$$

$\Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Diamond B)$ $\qquad (\Box A \wedge \Diamond B) \to \Diamond(A \wedge B)$

$\Box(A \vee B) \to (\Diamond A \vee \Box B)$ $\qquad (\Diamond A \wedge \Box B) \to \Diamond(A \wedge B)$

$\Box(A \uparrow B) \to (\Box A \uparrow \Diamond B)$ $\qquad (\Box A \downarrow \Diamond B) \to \Diamond(A \downarrow B)$

$\Box(A \uparrow B) \to (\Diamond A \uparrow \Box B)$ $\qquad (\Diamond A \downarrow \Box B) \to \Diamond(A \downarrow B)$

$\Box(A \leftrightarrow B) \to (\Box A \leftrightarrow \Box B)$ $\qquad (\Box A \leftrightarrow \Diamond B) \to \Diamond(A \leftrightarrow B)$

$\Box(A \leftrightarrow B) \to (\Diamond A \leftrightarrow \Diamond B)$ $\qquad (\Diamond A \leftrightarrow \Box B) \to \Diamond(A \leftrightarrow B)$

$\Box(A \updownarrow B) \to (\Box A \updownarrow \Diamond B)$ $\qquad (\Box A \updownarrow \Box B) \to \Diamond(A \updownarrow B)$

$\Box(A \updownarrow B) \to (\Diamond A \updownarrow \Box B)$ $\qquad (\Diamond A \updownarrow \Diamond B) \to \Diamond(A \updownarrow B)$

$(\Diamond A \wedge \Box B) \to \Diamond B$ $\qquad \Diamond A \to (\Box B \to \Diamond B)$

$(\Box B \wedge \Diamond A) \to \Diamond B$ $\qquad \Box B \to (\Diamond A \to \Diamond B)$

در R ، عکس بسیاری از قضایای M قابل اثبات است و از این رو این قضایا به هم‌ارزی تبدیل می‌شوند:

$$\Box(A\wedge B)\leftrightarrow(\Box A\wedge\Box B) \qquad (\Box A\vee\Box B)\rightarrow\Box(A\vee B)$$
$$\Diamond(A\wedge B)\rightarrow(\Diamond A\wedge\Diamond B) \qquad (\Diamond A\vee\Diamond B)\leftrightarrow\Diamond(A\vee B)$$

$$(\Diamond A\rightarrow\Box A)\rightarrow\Box(A\rightarrow A) \qquad (\Box A\rightarrow\Diamond A)\leftrightarrow\Diamond(A\rightarrow A)$$
$$(\Diamond A\rightarrow\Box B)\rightarrow\Box(A\rightarrow B) \qquad (\Box A\rightarrow\Diamond B)\leftrightarrow\Diamond(A\rightarrow B)$$

$$\Diamond(A\downarrow B)\rightarrow(\Box A\downarrow\Box B) \qquad (\Box A\uparrow\Box B)\leftrightarrow\Diamond(A\uparrow B)$$
$$\Box(A\downarrow B)\leftrightarrow(\Diamond A\downarrow\Diamond B) \qquad (\Diamond A\uparrow\Diamond B)\rightarrow\Box(A\uparrow B)$$

در اینجا نیز هیچ قضیه ضروری یا ممکن نداریم.

منطق‌های میانه

به جز منطق M، منطق‌های دیگری نیز میان منطق C و R وجود دارند که از لحاظ اهمیت، در حد M نیستند اما برای خود، جایگاهی در ادبیات منطق وجهی یافته‌اند. یک دشواری در کار کردن با این منطق‌های میانه این است که نمی‌توان نظام استنتاج طبیعی *ساده‌ای* بر پایه برهانک‌های وجهی، برای آنها فراهم آورد. اکنون، به اجمال، به این منطق‌ها می‌پردازیم. قاعده‌های زیر را در نظر بگیرید:

قاعده انتظام

$$\mathbf{R}\quad \begin{array}{c}\Box(A\wedge B)\\ \hline\hline \Box A\wedge\Box B\end{array}$$

قاعده یکنواختی

$$\mathbf{M}\quad \frac{\Box(A\wedge B)}{\Box A\wedge\Box B}$$

$$\mathbf{L}\quad \frac{\Box A\wedge\Box B}{\Box(A\wedge B)}$$

وضع مقدم ضروری

$$\mathbf{K}\quad \begin{array}{l}\Box A\\ \Box(A\rightarrow B)\\ \hline \Box B\end{array}$$

پخش ضرورت

$$\mathbf{K}\quad \frac{\Box(A\rightarrow B)}{\Box A\rightarrow\Box B}$$

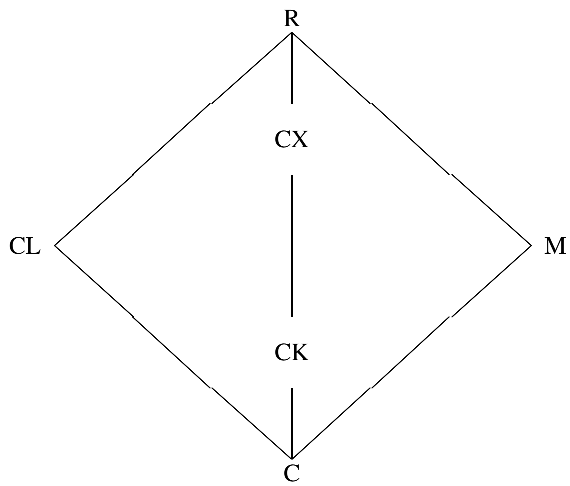
تعدی ضروری

$$\mathbf{X}\quad \begin{array}{l}\Box(A\rightarrow B)\\ \Box(B\rightarrow C)\\ \hline \Box(A\rightarrow C)\end{array}$$

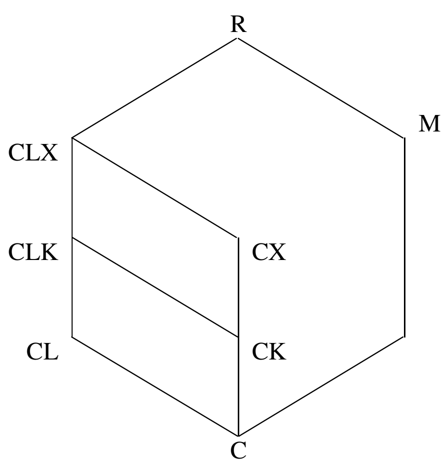
می‌توان نشان داد که افزودن قاعده‌های M و R به C دقیقا، همان منطق‌های M و R را نتیجه می‌دهد؛ اما افزودن قاعده L (= عکس قاعده M) و دو قاعده تقریبا هم‌توان با آن، یعنی K و X، نظام‌هایی ضعیف‌تر از R اما در عرض M تولید می‌کند:

$$CX = C + X$$
$$CK = C + K$$
$$CL = C + L$$

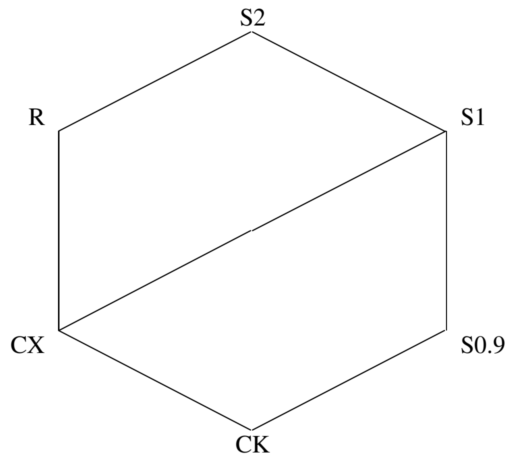
از نظر تاریخی، پیشینه قاعده‌های X، K و L، به ترتیب، به لویس و لنگفورد ۱۹۳۲، گودل ۱۹۳۳ و سگربرگ ۱۹۷۱ می‌رسد. از آنجا که قاعده K را می‌توان از قاعده X به دست آورد، روابط زیر برقرار است:



به نظر می‌رسد که ترکیب K و X با L نظام‌هایی ضعیف‌تر از R می‌سازند و در نتیجه، نمودار بالا به صورت زیر در می‌آید:



CK، CX و R ارتباط تنگاتنگی با منطق‌های S0.9، S1 و S2 دارند. S1 و S2 ضعیف‌ترین منطق‌های لویس و لنگفورد ۱۹۳۲ است و S0.9 را لمون ۱۹۵۷ ص ۱۸۱ با تضعیف از S1 به دست آورده است. میان این نظام‌ها، روابط زیر برقرار است:



تمرین

۱. در منطق CK، اثبات کنید:

اصل K برای ضرورت: K $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

اصل K برای امکان: $\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$

تضعیف اصل X: $[\Box(A \to B) \wedge \Box(B \to C)] \to (\Box A \to \Box C)$

تضعیف اصل X: $[\Box(A \to B) \wedge \Box(B \to C)] \to (\Diamond A \to \Diamond C)$

$\Box(A \wedge B \to B) \to (\Box(A \wedge B) \to \Box B)$
$\Box(C \to C) \to (\Box(A \wedge B) \to \Box B)$

$\Box(A \wedge B \to B) \to (\Diamond(A \wedge B) \to \Diamond B)$
$\Box(C \to C) \to (\Diamond(A \wedge B) \to \Diamond B)$

$\Box(A \to (B \to (A \wedge B))) \to (\Box A \to \Box(B \to (A \wedge B)))$
$\Box(C \to C) \to (\Box A \to \Box(B \to (A \wedge B)))$
$\Box(C \to C) \to (\Box A \to (\Box B \to \Box(A \wedge B)))$
$\Box(C \to C) \to ((\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B))$
$\Box(C \to C) \to ((\Box A \wedge \Box B) \leftrightarrow \Box(A \wedge B))$

$\Box A \to (\Box(A \to B) \to \Box B)$
$\Diamond A \to (\Box(A \to B) \to \Diamond B)$
$\Box A \to (\Diamond B \to \Diamond(A \wedge B))$
$\Diamond A \to (\Box B \to \Diamond(A \wedge B))$

$\Box(A \vee B) \rightarrow (\Box A \vee \Diamond B)$
$\Box(A \vee B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Box B)$

$\Box(A \vee B) \rightarrow [(\Box A \vee \Diamond B) \wedge (\Diamond A \vee \Box B)]$
$\Box(A \vee B) \rightarrow [(\Box A \wedge \Box B) \vee (\Diamond A \wedge \Diamond B) \vee (\Box A \wedge \Diamond B) \vee (\Diamond A \wedge \Box B)]$

$(\Box A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B))$
$(\Diamond A \wedge \Box B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B))$

$[(\Box A \wedge \Diamond B) \vee (\Diamond A \wedge \Box B)] \rightarrow \Diamond(A \wedge B))$
$[(\Box A \vee \Box B) \wedge (\Diamond A \vee \Diamond B) \wedge (\Box A \vee \Diamond B) \wedge (\Diamond A \vee \Box B)] \rightarrow \Diamond(A \wedge B))$

۲. در منطق CX، اثبات کنید:

X $[\Box(A \rightarrow B) \wedge \Box(B \rightarrow C)] \rightarrow \Box(A \rightarrow C)$ اصل X

$[\Box(A \rightarrow B) \wedge \Diamond(A \wedge C)] \rightarrow \Diamond(B \wedge C)$

$[\Box((A \rightarrow A) \rightarrow B) \wedge \Box(B \rightarrow C)] \rightarrow \Box((A \rightarrow A) \rightarrow C)$

$[\Box B \wedge \Box(B \rightarrow C)] \rightarrow \Box C$

K $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow \Diamond B)$

۳. در منطق CL، اثبات کنید:

$(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B))$

$\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$

$\Box A \rightarrow (\Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow \Diamond B)$

$\Diamond(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Diamond B)$

$\Diamond(A \vee B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$

$(\Box A \wedge \Box \sim A) \rightarrow \Box(A \wedge \sim A))$

$(\Box A \wedge \Box \sim A) \rightarrow \Box(B \wedge \sim B))$

$\Diamond(A \rightarrow A) \rightarrow (\Diamond B \vee \Diamond \sim B)$

$\Diamond(A \rightarrow A) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Diamond B)$

$[\Box(A \rightarrow B) \wedge \Box(B \rightarrow C)] \rightarrow \Box((A \vee B) \rightarrow (B \wedge C))$

$[\Box(A \rightarrow B) \wedge \Diamond(B \wedge C)] \rightarrow \Diamond(A \wedge C)$

$[\Box((A \rightarrow A) \rightarrow B) \wedge \Box(B \rightarrow C)] \rightarrow \Box((A \rightarrow A) \rightarrow C)$

$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box(A \wedge B))$

$\Box(A \rightarrow B) \rightarrow (\Diamond(A \vee B) \rightarrow \Diamond B)$

منطق‌های ضروری

منطق گزاره‌های ضروری *PCN*

در منطق‌های پیشین، هیچ کدام از قضایا ضروری نبودند و قضیه‌ای به صورت $\Box A$ یا $A \prec B$ نداشتیم. علت این مسئله این است که در این منطق‌ها، برهانک ضروری را بدون فرمول ضروری نمی‌توان ساخت. از این رو، هر فرمول ضروری مبتنی بر دست کم یک فرمول ضروری است و به همین دلیل، فرمول‌های ضروری، در مقدم و تالی قضایا می‌توانند باشند اما در ابتدای قضایا، نمی‌توانند قرار بگیرند.

منطق ضروری PCN ضعیف‌ترین نظامی است که همه قضایای آن ضروری‌اند. در منطق PCN ، برهانک ضروری داریم. برهانک ضروری را، در این منطق، بدون نیاز به فرمول ضروری می‌توان ساخت. در این صورت، سطر اول برهانک ضروری می‌تواند قضیه، فرض (یعنی یک برهانک فرضی) یا یک برهانک ضروری جدید باشد:

معرفی قضیه	برهانک فرضی	برهانک ضروری جدید
معرفی قضیه A $\Box$	فرض A $\Box$	A $\Box$ $\Box$

واضح است که در حالت سوم، برهانک ضروری جدید، در سطر اول، یکی از سه حالت بالا رخ خواهد داد.

در PCN ، همه قضایای منطق گزاره‌ها، ضروری هستند:

$$\Box (A \to A) \qquad A \prec A$$
$$\Box\Box (A \to A) \qquad \Box (A \prec A)$$
$$\Box\Box\Box (A \to A) \qquad \Box\Box (A \prec A)$$

$$\Box [(A \to (B \to A)] \qquad A \prec (B \to A)$$
$$\Box [(A \to (B \to A \wedge B)] \qquad A \prec (B \to A \wedge B)$$
$$\Box [(A \wedge B) \to (A \to B)] \qquad (A \wedge B) \prec (A \to B)$$

قاعده زیر، مهم‌ترین قاعده در منطق PCN است و با داشتن آن، می‌توان از برهانک‌های ضروری صرف نظر کرد:

قاعده ضرورت

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Box A}$$

منطق کلاسیک ضروری *N*

اگر در $PCN^{\Box}$ اجازه دهیم که قواعد دوطرفه بتوانند در جزء فرمول‌ها به کار روند (از جمله، در جزء فرمول‌های موجود در دامنه $\Box$)، به ضعیف‌ترین منطق وجهی، یعنی منطق وجهی ضروری N می‌رسیم.

در این منطق، همه هم‌ارزی‌های منطق C به هم‌ارزی اکید و ضروری تبدیل می‌شوند:

نقض جهت (قسم اول)

$\Diamond A = {\sim}\Box{\sim}A$
${\sim}\Diamond A = \Box{\sim}A$
$\neg A = \Box{\sim}A$

نقض مضاعف بیرونی

$\Box A = {\sim}{\sim}\Box A$
$\Diamond A = {\sim}{\sim}\Diamond A$
$\Diamond A = {\sim}\neg A$

نقض جهت (قسم دوم)

$\Box A = \neg{\sim}A$
$\Box A = {\sim}\Diamond{\sim}A$
${\sim}\Box A = \Diamond{\sim}A$

نقض مضاعف درونی

$\Box A = \Box{\sim}{\sim}A$
$\Diamond A = \Diamond{\sim}{\sim}A$

نقض جهت و دمورگان

${\sim}\Box(A \wedge B) = \Diamond({\sim}A \vee {\sim}B)$
${\sim}\Box(A \vee B) = \Diamond({\sim}A \wedge {\sim}B)$
${\sim}\Diamond(A \vee B) = \Box({\sim}A \wedge {\sim}B)$
${\sim}\Diamond(A \wedge B) = \Box({\sim}A \vee {\sim}B)$

جابجایی

$\Box(A \wedge B) = \Box(B \wedge A)$
$\Box(A \vee B) = \Box(B \vee A)$
$\Diamond(A \vee B) = \Diamond(B \vee A)$
$\Diamond(A \wedge B) = \Diamond(B \wedge A)$

عکس نقیض	$(A \prec B) = ({\sim}B \prec {\sim}A)$
انقباض	$[A \prec (A \rightarrow B)] = (A \prec B)$
جذب	$[A \prec (A \wedge B)] = (A \prec B)$
صدور	$[(A \wedge B) \prec C] = [A \prec (B \rightarrow C)]$

عکس نقیض

$\Box(A \rightarrow B) = \Box({\sim}B \rightarrow {\sim}A)$

$\Diamond(A \rightarrow B) = \Diamond({\sim}B \rightarrow {\sim}A)$

$\Box\Diamond(A \rightarrow B) = \Box\Diamond({\sim}B \rightarrow {\sim}A)$

$\Diamond\Diamond\Box\Diamond\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond(A \rightarrow B) = \Diamond\Diamond\Box\Diamond\Diamond\Diamond\Box\Box\Diamond({\sim}B \rightarrow {\sim}A)$

دو قاعده زیر نیز دو قاعده اساسی در منطق N است:

قاعده هم‌ارزی امکان

$$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Diamond A = \Diamond B}$$

قاعده هم‌ارزی ضرورت

$$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A = \Box B}$$

دو قاعده زیر نیز در منطق N پذیرفتنی اما اثبات‌ناپذیر هستند:

$$\frac{\vdash A = B}{\vdash \Box A = \Box B} \qquad \frac{\vdash A = B}{\vdash \Diamond A = \Diamond B}$$

منطق یک‌نواخت ضروری *P*

ترکیب دو منطق M و N، منطق جدیدی را نتیجه می‌دهد که نام آن را P می‌گذاریم. آشکار است که همه قضایای M در P ضروری هستند.

در P ، می‌توان قاعده فرعی بسیار مفید زیر را اثبات کرد:

خروج تناقض از برهانک امکانی

$$
\begin{array}{ll}
 & \Diamond \;\Big| \\
 & \quad\;\; \Big|\; A \wedge {\sim}A \\
\therefore & A \wedge {\sim}A
\end{array}
$$

این قاعده می‌گوید که تناقض ممکن نیست و بنابراین، امکان تناقض به مثابه خود تناقض است. در نظام‌های C ، M و R، تناقض می‌توانست ممکن باشد! زیرا در آنها، هیچ گزارهٔ ضروری، قضیه نبود. اما چنان که می‌بینیم، در P ، تناقض ممتنع و غیر ممکن است. در سمانتیک این منطق‌ها، خواهیم دید که در جهان‌های ممکن P ، تناقض در هیچ جهانی ممکن نیست اما در جهان‌های C ، M و R ، دست کم یک جهان وجود دارد که تناقض، در آن، ممکن است! این جهان‌ها را «غیر نرمال» می‌نامند و «غیر نرمال» نامیدن این سه نظام، نیز، به دلیل داشتن جهان‌های غیر نرمال در سمانتیک آنهاست.

منطق نرمال *K*

ترکیب دو منطق R و N، منطق جدیدی را نتیجه می‌دهد که به افتخار ساول کریپکی، K نامیده شده است. آشکار است که همه قضایای R در K ضروری هستند. برای نمونه:

تقویت اصل K برای ضرورت		$\Box(A \to B) \prec (\Box A \to \Box B)$
تقویت اصل K برای امکان		$\Box(A \to B) \prec (\Diamond A \to \Diamond B)$
تقویت اصل X		$[\Box(A \to B) \wedge \Box(B \to C)] \prec \Box(A \to C)$
اصل WB (تعدی استلزام اکید)	WB	$[(A \prec B) \wedge (B \prec C)] \prec (A \prec C)$

$(\Box A \wedge \Diamond B) \prec \Diamond(A \wedge B)$	$\Box(A \vee B) \prec (\Box A \vee \Diamond B)$
$(\Box A \wedge \Diamond B) \prec \Diamond(A \wedge B)$	$\Box(A \vee B) \prec (\Diamond A \vee \Box B)$
$\Diamond(A \wedge B) \prec (\Diamond A \wedge \Diamond B)$	$(\Box A \vee \Box B) \prec \Box(A \vee B)$

نمودار نظام‌ها

تاکنون، با قاعده‌های زیر آشنا شدیم:

قاعده انتظام

$$\mathbf{R}\quad \frac{\Box(A \wedge B)}{\Box A \wedge \Box B}$$

قاعده هم‌ارزی

$$\mathbf{C}\quad \frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$$

قاعده یکنواختی

$$\mathbf{M}\quad \frac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash \Box A \rightarrow \Box B}$$

قاعده ضرورت

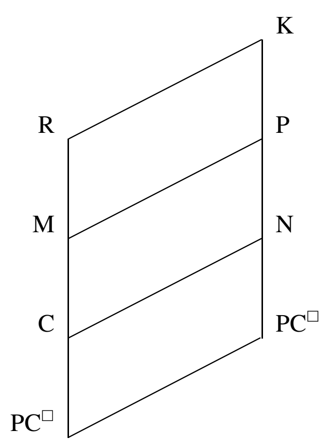
$$\mathbf{N}\quad \frac{\vdash A}{\vdash \Box A}$$

و به نظام‌های زیر اشاره کردیم:

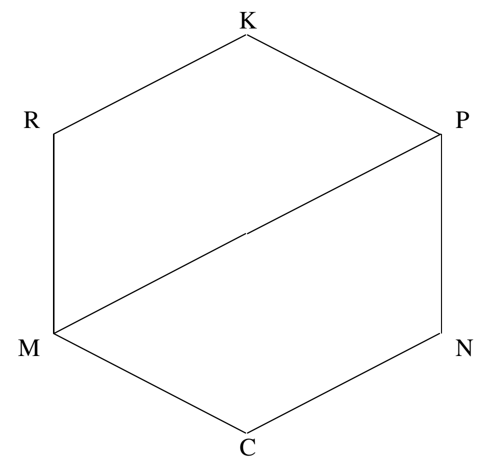
$PC^{\Box} = PC + \{ \Box \}$
$C = PC^{\Box} + C$
$M = PC^{\Box} + M$
$R = PC^{\Box} + R$

$PCN = PC^{\Box} + N$
$N = C + N$
$P = M + N$
$K = R + N$

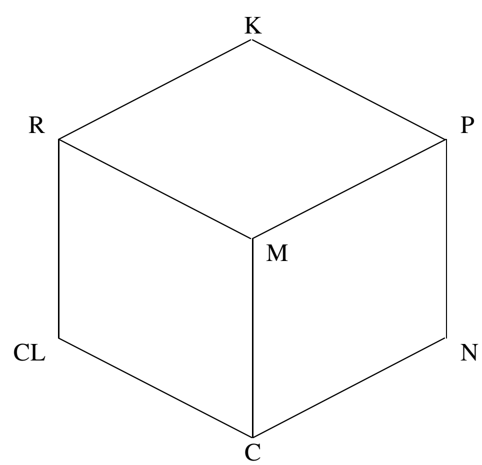
میان این نظام‌ها، روابط زیر برقرار است:



و نمودار زیر، نیز، روابط میان نظام‌های دارای سمانتیک را نشان می‌دهد:



منطق‌های قوی‌تر در بالا قرار دارند و با یک یا چند پاره‌خط به نظام‌های ضعیف‌تر پایین دسترسی دارند. جایگاه منطق CL در میان این نظام‌ها را نیز در زیر نشان داده‌ایم:



منطق‌های ممکن

منطق گزاره‌های ممکن PCM

در منطق‌های پیشین، هیچ کدام از قضایا ممکن نبودند و قضیه‌ای به صورت $\Diamond A$ نداشتیم. علت این مسئله این است که در این منطق‌ها، برهانک امکانی را بدون فرمول ممکن نمی‌توان ساخت. از این رو، هر فرمول ممکن مبتنی بر دست کم یک فرمول ممکن است و به همین دلیل، فرمول‌های ممکن، در مقدم و تالی قضایا می‌توانند باشند اما در ابتدای قضایا، نمی‌توانند قرار بگیرند.

منطق ممکن PCM ضعیف‌ترین نظامی است که همه قضایای آن ممکن‌اند. در منطق PCM، برهانک امکانی داریم. برهانک امکانی را، در این منطق، بدون نیاز به فرمول ممکن می‌توان ساخت. در این صورت، سطر اول برهانک امکانی می‌تواند قضیه، فرض (یعنی یک برهانک فرضی) یا یک برهانک امکانی جدید باشد:

معرفی قضیه	برهانک فرضی	برهانک امکانی جدید
معرفی قضیه A $\Diamond$	فرض A $\Diamond$	A $\Diamond$ $\Diamond$

واضح است که در حالت سوم، برهانک امکانی جدید، در سطر اول، یکی از سه حالت بالا رخ خواهد داد.

در PCM، همه قضایای منطق گزاره‌ها، ممکن هستند:

$\Diamond (A \to A)$
$\Diamond\Diamond (A \to A)$
$\Diamond\Diamond\Diamond (A \to A)$

$\Diamond [(A \to (B \to A)]$
$\Diamond [(A \to (B \to A \wedge B)]$
$\Diamond [(A \wedge B) \to (A \to B)]$

قاعده زیر، مهم‌ترین قاعده در منطق PCM است و با داشتن آن، می‌توان از برهانک‌های ممکن صرف نظر کرد:

قاعده امکان

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Diamond A}$$

با افزودن قاعده بالا و یا قاعده گفته شده برای برهانک‌های امکانی به هر یک از نظام‌های پیش‌گفته (اعم از ضروری و غیرضروری)، می‌توان یک منطق ممکن برساخت. بررسی تفصیلی این منطق‌ها را بر عهده خواننده وا می‌نهیم.

منطق‌های گسترش یافته

قاعده‌های زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{D}\ \frac{\Box A}{\Diamond A} \qquad \mathbf{T}\ \frac{\Box A}{A} \qquad \mathbf{B}\ \frac{A}{\Box\Diamond A}$$

پخش اکید ضرورت

$$\mathbf{3}\ \frac{\Box(A \to B)}{\Box(\Box A \to \Box B)} \qquad \mathbf{4}\ \frac{\Box A}{\Box\Box A} \qquad \mathbf{5}\ \frac{\Diamond A}{\Box\Diamond A}$$

با افزودن هر یک از قاعده‌های بالا به هر یک از نظام‌های C، M، R و K، می‌توانیم این منطق‌ها را گسترش دهیم. عکس این قاعده‌ها را نیز می‌توان به این منطق‌ها افزود و گسترش‌های بیشتری را به دست آورد:

$$\mathbf{D_C}\ \frac{\Diamond A}{\Box A} \qquad \mathbf{T_C}\ \frac{A}{\Box A} \qquad \mathbf{B_C}\ \frac{\Box\Diamond A}{A}$$

$$\mathbf{3_C}\ \frac{\Box(\Box A \to \Box B)}{\Box(A \to B)} \qquad \mathbf{4_C}\ \frac{\Box\Box A}{\Box A} \qquad \mathbf{5_C}\ \frac{\Box\Diamond A}{\Diamond A}$$

ترکیب هر یک از این شش قاعده با عکس آن، قاعده‌های قوی‌تری را به دست می‌دهند که در زیر، به نمایش می‌گذاریم:

$$\mathbf{D_E}\ \begin{array}{c}\Diamond A\\ \hline\hline \Box A\end{array} \qquad \mathbf{Triv}\ \begin{array}{c}A\\ \hline\hline \Box A\end{array} \qquad \mathbf{B_E}\ \begin{array}{c}\Box\Diamond A\\ \hline\hline A\end{array}$$

$$\mathbf{3_E}\ \begin{array}{c}\Box(\Box A \to \Box B)\\ \hline\hline \Box(A \to B)\end{array} \qquad \mathbf{4_E}\ \begin{array}{c}\Box\Box A\\ \hline\hline \Box A\end{array} \qquad \mathbf{5_E}\ \begin{array}{c}\Box\Diamond A\\ \hline\hline \Diamond A\end{array}$$

افزودن هر یک از اصل‌های زیر به منطق‌های گفته شده، گسترش‌هایی را به وجود می‌آورد که هر یک اهمیت خاص خود را دارد:

اصل امکان (همه چیز ممکن است)	$\Diamond A$	Poss
اصل امتناع (هیچ چیز ممکن نیست)	$\Box A$	Ver
اصل ضرورت (منطق ضروری است)	$\Box (A \rightarrow A)$	$\Box$

برای نام‌گذاریِ منطق حاصل، کافی است نام قاعده (یا قاعده‌های) افزوده شده را در سمت راست نظام مورد نظر بگذاریم. برای نمونه، منطق CT از افزودن قاعده T به منطق C به دست می‌آید و منطق CT5 از افزودن قاعده‌های T و 5 به منطق C نتیجه می‌شود. از آنجا که نام «K» هم برای یک قاعده و هم برای یک نظام به کار رفته است، برای رفع ابهام، می‌توان به این نکته توجه کرد که در یک نام مرکب، اگر K حرف آغازین باشد نام نظام، و در غیر این صورت، نام قاعده است. برای نمونه، KD4B نظام حاصل از افزودن قاعده‌های D، 4 و B به نظام K است اما MK3 نظام حاصل از افزودن قاعده‌های K و 3 به نظام M است.

فرمول‌های زیر را در نظر بگیرید:

D $\Box A \rightarrow \Diamond A$
T $\Box A \rightarrow A$
B $A \rightarrow \Box\Diamond A$
5 $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
4 $\Box A \rightarrow \Box\Box A$

3 $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow \Box (\Box A \rightarrow \Box B)$
K $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
X $[\Box (A \rightarrow B) \wedge \Box (B \rightarrow C)] \rightarrow \Box (A \rightarrow C)$

Poss $\Diamond A$
Ver $\Box A$
Triv $\Box A \leftrightarrow A$
T_C $A \rightarrow \Box A$
$\Box$ $\Box (A \rightarrow A)$

هر یک از این فرمول‌ها، معادل یکی از قاعده‌های گفته شده است و در نظام‌های اصل‌موضوعی، به جای آنها به کار می‌روند.

قوی‌ترین نظام‌ها

افزدون هر یک از قواعد یا اصول زیر، به منطق C، قوی‌ترین نظام‌های وجهی سازگار را نتیجه می‌دهد:

Poss $\Diamond A$		Ver $\Box A$		Triv $\dfrac{A}{\Box A}$

«قوی‌ترین نظام وجهی سازگار» به این معناست که گسترش آن با هر قاعده‌ای، یک نظام متناقض به دست می‌دهد که همه تناقض‌ها، بلکه همه فرمول‌ها، قضیه آن نظام است. همه نظام‌های منطق موجهات، زیرنظامِ یکی از این سه نظام هستند. نام این سه نظام برابر است با نام قاعده‌های آنها:

$$\text{Triv} = C + \text{Triv}$$
$$\text{Ver} = C + \text{Ver}$$
$$\text{Poss} = C + \text{Poss}$$

از منطق‌های پیش‌گفته، منطق‌های ضروری، مانند N، P و K، درون نظام‌های Triv و Ver قرار دارند و با Poss ناسازگارند (زیرا امکان برابر است با سلب ضرورت.) در برابر، منطق‌های غیرضروری، مانند C، M و R درون هر سه نظام قوی هستند.

ترکیب این سه نظام را، که نظامی متناقض و شامل همه فرمول‌ها به عنوان قضیه است، ⊥ می‌نامیم:

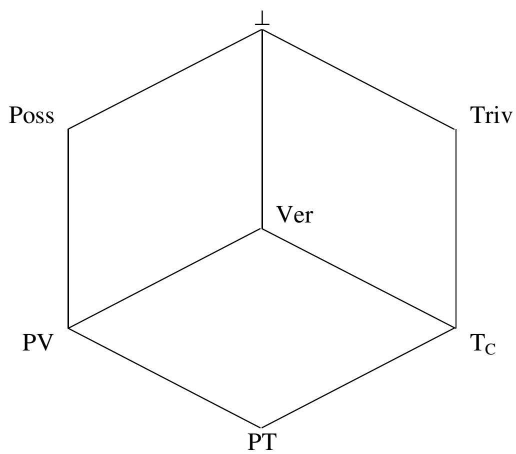
$$\perp = \text{Triv} + \text{Ver} = \text{Triv} + \text{Poss} = \text{Poss} + \text{Ver} = \text{Triv} + \text{Ver} + \text{Poss}$$

قدر مشترک میان این سه نظام، سه نظام بسیار قوی زیر است:

$$T_C =_{\text{تع}} C + A \to \Box A$$

$$PV =_{\text{تع}} C + \Box A \to \Box B$$

$$PT =_{\text{تع}} C + \Box A \to (B \to \Box B)$$



فروکاهی منطق‌های وجهی قوی به منطق گزاره‌ها

سه منطق قوی‌ترین را می‌توان به دو صورت در نظر گرفت: به عنوان منطق‌های وجهی و به عنوان منطق‌گزاره‌های غیروجهی. در صورت اول، □ و ◊ به همان معنای متداول ضرورت و امکان هستند و ادعاهای درباره آنها در این سه منطق صورت گرفته است. در صورت دوم، این منطق‌ها را باید، صرفا، گسترش درون- سیستمیِ «زبانِ» منطق گزاره‌ها دانست، به این معنا که هر یک از این سه نظام منطقی، سه ادات «تابع ارزشی» یک موضعی (مانند ادات ناقض) به منطق گزاره‌ها افزوده‌اند که جدول ارزش آنها به صورت زیر است:

Triv

A	$\Box$A	$\Diamond$A	$\neg$A
1	1	1	0
0	0	0	1

Ver

A	$\Box$A	$\Diamond$A	$\neg$A
1	1	0	1
0	1	0	1

Poss

A	$\Box$A	$\Diamond$A	$\neg$A
1	0	1	0
0	0	1	0

در منطق Triv، نمادهای $\Box$ و $\Diamond$، معنای «صادق است» را دارند چنان که نماد $\neg$، مانند ~، «کاذب است» معنا می‌دهد.

در منطق Ver، نمادهای $\Box$ و $\Diamond$، به معنای دیگری به کار می‌روند: در این منطق، $\Box$A و $\neg$A، به معنای $A \rightarrow A$، و $\Diamond$A، به معنای $A \wedge {\sim} A$ است. به عبارت دیگر، $\Box$ و $\neg$ به معنای صدق و $\Diamond$ به معنای کذب است.

در منطق Poss، نمادهای $\Box$، $\neg$ و $\Diamond$، به عکس معنای آنها در Ver به کار می‌روند.

Triv، نظام اندیشه‌ای فلاسفه الهی

از سه نظام قوی‌ترین، منطق Triv هواداران فلسفی بسیاری دارد. برای نمونه، فیلسوفان متألّه (مانند فیلسوفان مسلمان و فیلسوفان مسیحی تومیست) این نظام را قبول دارند. از نظر آنها، موجودات همگی واجب الوجود هستند (خواه بالذات خواه بالغیر) و نمی‌توان موجودی را یافت که واجب الوجود نباشد. واضح است که در اینجا، «ضرورت» در معنای اعم آن به کار رفته است که شامل ضرورت بالذات و ضرورت بالغیر می‌شود.

بسیاری از فیلسوفان، این نظام را بیش از حد قوی می‌دانند. حتی در نظر فیلسوفان مسلمان و مسیحی تومیست، اگر ضرورت را به معنای خاص آن، یعنی ضرورت بالذات، بگیریم، این نظام، نظام مناسبی نخواهد بود زیرا بسیاری از موجودات، واجب بالذات نیستند زیرا ممکن بالذات هستند. از این رو، لازم است نظام‌های ضعیف‌تری را در نظر بگیریم که فیلسوفان بیش‌تری را با خود همراه کند و یا دست کم، احکام ضرورت و امکان بالذات را بیان نماید.

گسترش‌های معروف

قاعده‌های D، T، B، 3، 4 و 5، از قواعد پیش‌گفته، قواعدی ضعیف‌تر از قاعده Triv هستند و مورد توجه بسیاری از فیلسوفان و منطق‌دانان قدیم و جدید بوده‌اند.

از این قاعده‌ها، تنها اصل 4 است که از هر سه نظام قوی‌ترین، نتیجه می‌شود و با آنها سازگار است. D و T با قاعدهٔ نامقبول Ver ناسازگارند و B و 5 با قاعده نادرست Poss در تضاد هستند و این، خود، شاید دلیلی بر موجه بودن این قاعده‌هاست.

قاعده 3 در ارتباط بسیار نزدیک با 4 است (برای نمونه، K3 = K4) و به دلیل پیچیدگی ظاهر آن، چندان مورد توجه قرار نگرفته است. ما نیز ترجیح می‌دهیم این قاعده را جداگانه مورد بررسی قرار دهیم. از این رو، به گسترش منطق‌های C، M، R، N، P و K با پنج قاعده D، T، B، 4 و 5 می‌پردازیم:

گسترش‌های منطق $PC^{\Box}$

با پنج قاعده D، T، B، 4 و 5، می‌توان ۳۲ گسترش برای نظام $PC^{\Box}$ به وجود آورد (زیرا در یک گسترش، هر یک از قواعد پنج‌گانه، یکی از این دو حالت را دارد: یا حضور دارد یا ندارد؛ بنابراین، دو به توان پنج حالت وجود دارد که برابر است

با ۳۲). از این ۳۲ گسترش، برخی با هم برابرند زیرا قواعد هر یک از آنها در دیگری قابل اثبات است. اکنون، به اثبات این قواعد می‌پردازیم:

در $PC^{\square}T$، $PC^{\square}T5$ و $PC^{\square}DB4$، می‌توان به ترتیب، قاعده‌های D، B و T را ثابت کرد:

D $\quad \square A \rightarrow \lozenge A \quad$ در $PC^{\square}T$:

برهان:

1. $\square A$ مقدمه
2. A T
3. $\lozenge A$ T

B $\quad A \rightarrow \square\lozenge A \quad$ در $PC^{\square}T5$:

برهان:

1. A مقدمه
2. $\lozenge A$ T
3. $\square\lozenge A$ 5

T $\quad \square A \rightarrow A \quad$ در $PC^{\square}DB4$:

برهان:

1. $\square A$ مقدمه
2. $\square\square A$ 4
3. $\lozenge\square A$ D
4. A 5

به دلیل اثبات D به کمک T، نتیجه می‌گیریم که نظامی شامل T و فاقد D نداریم و بنابراین، یک چهارم از ۳۲ ترکیب متصور، امکان وقوع ندارند (و به عبارت دیگر، یک چهارم از ۳۲ گسترشِ $PC^{\square}$، به دیگر نظام‌ها فرومی‌کاهند.) به دلیل اثبات B در $PC^{\square}T5$، نتیجه می‌گیریم که نظامی شامل T و 5 و فاقد B نداریم و در نتیجه، ترکیب‌های T5 و T45 حذف می‌شوند. به دلیل اثبات T در $PC^{\square}DB4$، نتیجه می‌گیریم که نظامی شامل T و فاقد D نداریم و در نتیجه، ترکیب‌های DB4 و DB45 حذف می‌شوند. با کنار گذاشتن این ۱۲ ترکیب، ۲۰ ترکیب باقی می‌ماند و بر این اساس، با پنج قاعده D، T، B، 4 و 5، می‌توان ۲۰ گسترش برای نظام $PC^{\square}$ به وجود آورد. این ۲۰ نظام منطقی را، در جدول زیر، به نمایش گذاشته‌ایم:

همه ترکیب‌های ممکن از افزودن قواعد پنج‌گانهٔ D، T، B، 4 و 5 به نظام PC□

تعداد قواعد / شماره	۰	۱	۲	۳	۴	۵	تعداد ترکیب قواعد
۱	PC□						۱
۲		PC□D					۱
۳		PC□B					۱
۴		PC□4					۱
۵		PC□5					۱
۶		PC□T =	PC□DT				۲
۷			PC□DB				۱
۸			PC□D4				۱
۹			PC□D5				۱
۱۰			PC□45				۱
۱۱			PC□B4				۱
۱۲			PC□B5				۱
۱۳				PC□B45			۱
۱۴				PC□D45			۱
۱۵			PC□TB =	PC□DTB			۱
۱۶			PC□T4 =	PC□DT4			۲
۱۷				PC□DB5			۲
۱۸				PC□DB4 = PC□TB4 =	PC□ PC□DTB4		۳
۱۹			CT5 =	PC□DT5 = = PC□TB5 =	PC□DTB5		۴
۲۰				PC□T45 =	PC□TB45 = PC□DB45 = PC□DT45 =	PC□DTB45	۵
جمع	۱ +	۵ +	۱۰ +	۱۰ +	۵ +	۱ =	۳۲

تمرین:

۱. در $PC^{\Box}D$، ثابت کنید:

$\Box A \to \Diamond A$
$\Diamond A \vee \Diamond \sim A$
$\sim (\Box A \wedge \Box \sim A)$
$\sim (\Box A \wedge \neg A)$
$\sim \Diamond A \to \Diamond \sim A$
$\Box\Diamond A \to \Diamond\Diamond A$
$\Box\Box A \to \Diamond\Box A$
$(\Diamond A \to \Box B) \to (\Box A \to \Diamond B)$

۲. در $PC^{\Box}T$، ثابت کنید:

$\Box A \to A$	5c	$\Box\Diamond A \to \Diamond A$	$\Box A \to \Diamond\Box A$
$A \to \Diamond A$	4c	$\Box\Box A \to \Box A$	$\Diamond A \to \Diamond\Diamond A$
$\Box A \to \Diamond A$		$\Box\Box\Box A \to \Box A$	$\Diamond A \to \Diamond\Diamond\Diamond A$
$\sim \Diamond A \to \Diamond \sim A$			$\neg A \to \sim A$
$\Diamond A \vee \sim A$		$(A \wedge (A \prec B)) \to B$	
$A \vee \Diamond \sim A$		$(A \wedge \Box (A \to B)) \to B$	
$\sim (\Box A \wedge \sim A)$			
$\sim (A \wedge \neg A)$		$(A \to \Box B) \to (\Box A \to B)$	

۳. در $PC^{\Box}B$، ثابت کنید:

B	$A \to \Box\Diamond A$	$\Diamond A \to \Box\Diamond\Diamond A$	$\Box A \to \Box\Diamond\Box A$
	$\Diamond\Box A \to A$	$\Diamond\Box\Diamond A \to \Diamond A$	$\Diamond\Box\Box A \to \Box A$
G1	$\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$	$\Diamond\Box\Diamond A \to \Box\Diamond\Diamond A$	$\Diamond\Box\Box A \to \Box\Diamond\Box A$

۴. در $PC^{\Box}4$، ثابت کنید:

4	$\Box A \to \Box\Box A$	$\Box\Box A \to \Box\Box\Box A$	$\Box\Diamond A \to \Box\Box\Diamond A$
	$\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$	$\Diamond\Diamond\Diamond A \to \Diamond\Diamond A$	$\Diamond\Diamond\Box A \to \Diamond\Box A$

۵. در $PC^{\Box}5$، ثابت کنید:

5	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$	$\Diamond\Diamond A \to \Box\Diamond\Diamond A$	$\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box A$
	$\Diamond\Box A \to \Box A$	$\Diamond\Box\Diamond A \to \Box\Diamond A$	$\Diamond\Box\Box A \to \Box\Box A$

۶. در $PC^{\Box}T4$، ثابت کنید:

$\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Diamond A$	$\Box A \leftrightarrow \Box\Box A$
$\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Diamond\Box A$	$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Box\Diamond A$

۷. در $PC^{\Box}D45$، ثابت کنید:

$\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A$	$\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box A$
$\Diamond\Box A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box A$	$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond A$
$\Box A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box A$	$\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond A$
$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$	$\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box A$
$\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$	$\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box A$

۸. در $PC^{\Box}TB$، ثابت کنید:

$A \rightarrow \Box\Diamond\Diamond A$	$A \rightarrow \Diamond\Box\Diamond A$
$\Diamond\Box\Box A \rightarrow A$	$\Box\Diamond\Box A \rightarrow A$
$\Diamond\Box\Box A \rightarrow \Box\Diamond\Diamond A$	$\Box\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond\Box\Diamond A$

گسترش‌های منطق C

در CT5 و CDB4، می‌توان به ترتیب، قاعده‌های 4 و 5 را ثابت کرد. برای اثبات، توجه کنید که در این دو منطق، به ترتیب، B و T قابل اثبات است (رجوع کنید به برهانی که در گسترش‌های $PC^{\Box}$ آوردیم). برهان 4 و5 در این دو نظام، به قرار زیر است:

در CT5: $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ 4

برهان:

1. $\vdash \Diamond\Box A \leftrightarrow \Box A$ T , 5
2. $\vdash \Box\Diamond\Box A \leftrightarrow \Box\Box A$ قاعده هم‌ارزی ضرورت
3. $\vdash \Box A \rightarrow \Box\Diamond\Box A$ B
4. $\vdash \Box A \rightarrow \Box\Box A$ تعدی ۲ و ۳

در CDB4: $\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ 5

برهان:

1. $\vdash \Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond A$ T , 4
2. $\vdash \Box\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A$ قاعده هم‌ارزی ضرورت
3. $\vdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond\Diamond A$ B
4. $\vdash \Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$ تعدی ۲ و ۳

بر اساس دو برهان بالا، از ۲۰ گسترش یاد شده برای $PC^{\Box}$ ، دو نظام آخر به نظام قبلی‌شان فرومی‌کاهند و بنابراین، ۱۸ گسترش برای C خواهیم داشت. این نظام‌ها را در جدول زیر، به نمایش گذاشته‌ایم:

همه ترکیب‌های ممکن از افزودن قواعد پنج‌گانهٔ D، T، B، 4 و 5 به نظام C

شماره \ تعداد قواعد	۰	۱	۲	۳	۴	۵	تعداد ترکیب قواعد
۱	C						۱
۲		CD					۱
۳		CB					۱
۴		C4					۱
۵		C5					۱
۶		CT =	CDT				۲
۷			CDB				۱
۸			CD4				۱
۹			CD5				۱
۱۰			C45				۱
۱۱			CB4				۱
۱۲			CB5				۱
۱۳				CB45			۱
۱۴				CD45			۱
۱۵			CTB =	CDTB			۱
۱۶			CT4 =	CDT4			۲
۱۷				CDB5			۲
۱۸			CT5	= CDB4 = = CTB4 = = CDT5 = = CTB5 = CT45 = = =	CDTB4 CDTB5 CTB45 CDB45 CDT45 =	CDTB45	۱۲
جمع	۱ +	۵ +	۱۰ +	۱۰ +	۵ +	۱ =	۳۲

۵ نظام از گسترش‌های C، منطق‌های ضروری‌اند به این معنا که ضرورت قضیه‌هایشان نیز قضیه است. این ۵ منطق عبارتند از:

CB4 , CB45 , CTB , CDB5 , CT5;

و بنابراین، به ترتیب، برابرند با

NB4 , NB45 , NTB , NDB5 , NT5.

برهان: برای اثبات، کافی است $\Box(A \to A)$ را در هر یک از نظام‌های یادشده اثبات کنیم:

در CT5: $\Box(A \to A)$

برهان:

1.	$\vdash A \to A$	PC
2.	$\vdash \Diamond(A \to A)$	(۱) T
3.	$\vdash \Box\Diamond(A \to A)$	(۲) 5
4.	$\vdash \Diamond(A \to A) \wedge (A \to A)$	م ∧ (۱ و ۲)
5.	$\vdash \Diamond(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$	(۴) PC
6.	$\vdash \Box\Diamond(A \to A) \leftrightarrow \Box(A \to A)$	قاعده هم‌ارزی ضرورت (۵)
7.	$\vdash \Box(A \to A)$	و م (۳ و ۶)

در CDB5: $\Box(A \to A)$

برهان:

1.	$\vdash A \to A$	PC
2.	$\vdash \Box\Diamond(A \to A)$	(۱) B
3.	$\vdash \Diamond\Diamond(A \to A)$	(۲) D
4.	$\vdash \Box\Diamond\Diamond(A \to A)$	(۳) 5
5.	$\vdash \Diamond\Diamond(A \to A) \wedge (A \to A)$	م ∧ (۱ و ۳)
6.	$\vdash \Diamond\Diamond(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$	(۵) PC
7.	$\vdash \Box\Diamond\Diamond(A \to A) \leftrightarrow \Box(A \to A)$	قاعده هم‌ارزی ضرورت (۶)
8.	$\vdash \Box(A \to A)$	و م (۴ و ۷)

در CTB: $\Box(A \to A)$

برهان:

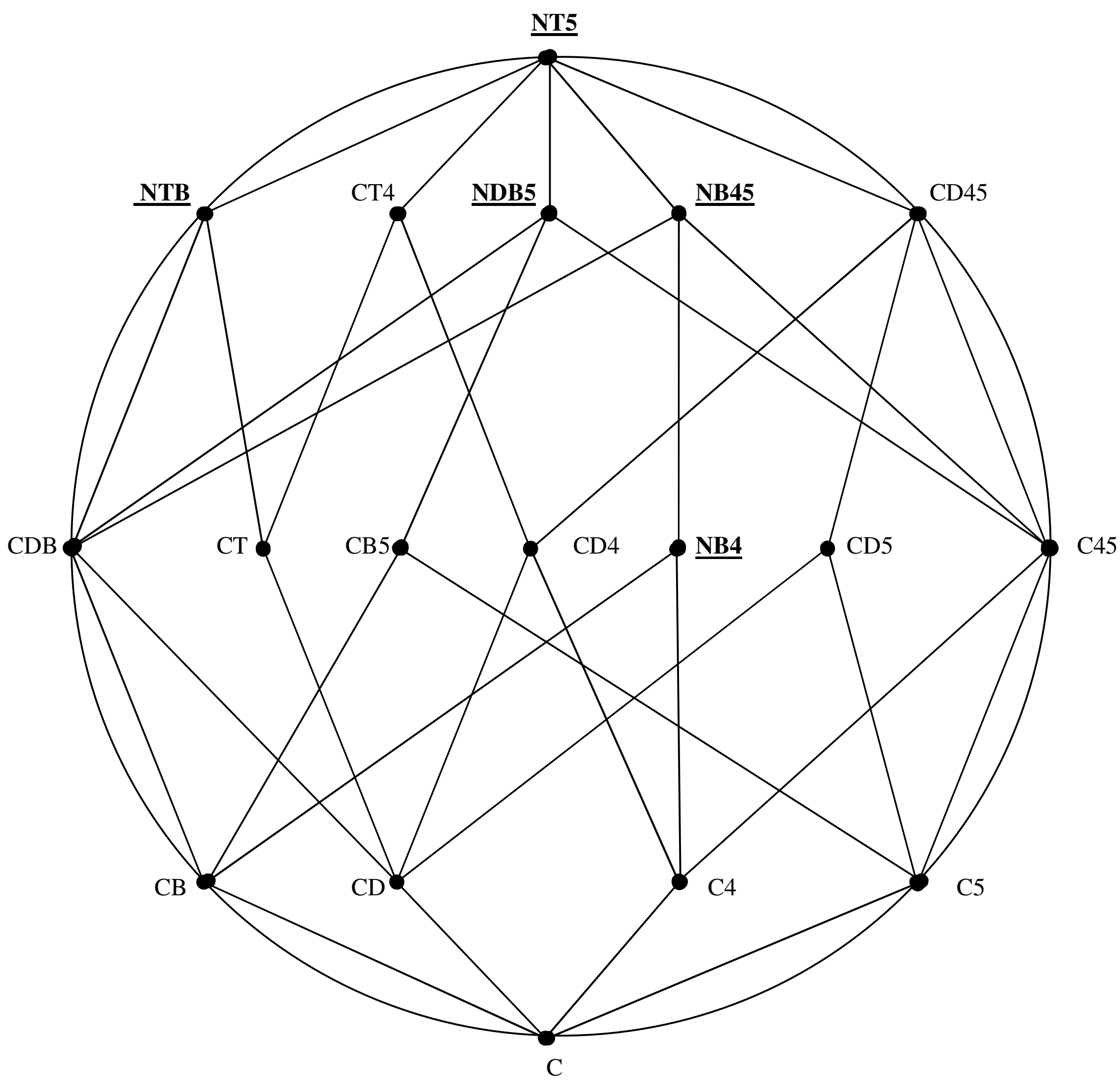
1.	$\vdash A \to A$	PC
2.	$\vdash \Diamond(A \to A)$	(۱) T
3.	$\vdash \Box\Diamond(A \to A)$	(۱) B
4.	$\vdash \Diamond(A \to A) \wedge (A \to A)$	م ∧ (۱ و ۲)
5.	$\vdash \Diamond(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$	(۴) PC
6.	$\vdash \Box\Diamond(A \to A) \leftrightarrow \Box(A \to A)$	قاعده هم‌ارزی ضرورت (۵)
7.	$\vdash \Box(A \to A)$	و م (۳ و ۶)

در CB4 و CB45: $\Box(A \to A)$

برهان:

1.	$\vdash A \to A$	PC
2.	$\vdash \Box\Diamond(A \to A)$	(۱) B
3.	$\vdash \Box\Box\Diamond(A \to A)$	(۲) 4
4.	$\vdash \Box\Diamond(A \to A) \wedge (A \to A)$	م ∧ (۱ و ۲)
5.	$\vdash \Box\Diamond(A \to A) \leftrightarrow (A \to A)$	(۴) PC
6.	$\vdash \Box\Box\Diamond(A \to A) \leftrightarrow \Box(A \to A)$	قاعده هم‌ارزی ضرورت (۵)
7.	$\vdash \Box(A \to A)$	و م (۳ و ۶)

نمودار گسترش‌های C به صورت زیر است.



در این نمودار، منطق‌های ضروری را به صورت برجسته نشان داده‌ایم.

تمرین:

۱. در CD، ثابت کنید:

$\Box A \to \Diamond A$
$\Diamond A \vee \Diamond \sim A$
$\sim (\Box A \wedge \Box \sim A)$
$\sim (\Box A \wedge \neg A)$
$\sim \Diamond A \to \Diamond \sim A$
$\Box\Diamond A \to \Diamond\Diamond A$
$\Box\Box A \to \Diamond\Box A$
$(\Diamond A \to \Box B) \to (\Box A \to \Diamond B)$

۲. در CT، ثابت کنید:

	$\Box A \to A$	5c	$\Box\Diamond A \to \Diamond A$	$\Box A \to \Diamond\Box A$
	$A \to \Diamond A$	4c	$\Box\Box A \to \Box A$	$\Diamond A \to \Diamond\Diamond A$
*	$\Diamond (A \to A)$		$\Box\Box\Box A \to \Box A$	$\Diamond A \to \Diamond\Diamond\Diamond A$
	$\Box A \to \Diamond A$			$\neg A \to \sim A$
	$\sim \Diamond A \to \Diamond \sim A$		$(A \wedge (A \prec B)) \to B$	
	$\Diamond A \vee \sim A$		$(A \wedge \Box (A \to B)) \to B$	
	$A \vee \Diamond \sim A$			
	$\sim (\Box A \wedge \sim A)$		$(A \to \Box B) \to (\Box A \to B)$	
	$\sim (A \wedge \neg A)$			

۳. در CB، ثابت کنید:

*	$\Box \Diamond (A \to A)$		
B	$A \to \Box \Diamond A$	$\Diamond A \to \Box \Diamond\Diamond A$	$\Box A \to \Box \Diamond\Box A$
	$\Diamond \Box A \to A$	$\Diamond \Box\Diamond A \to \Diamond A$	$\Diamond \Box\Box A \to \Box A$
G1	$\Diamond \Box A \to \Box \Diamond A$	$\Diamond \Box\Diamond A \to \Box \Diamond\Diamond A$	$\Diamond \Box\Box A \to \Box\Diamond\Box A$

۴. در C4، ثابت کنید:

4	$\Box A \to \Box \Box A$	$\Box\Box A \to \Box\Box\Box A$	$\Box\Diamond A \to \Box\Box\Diamond A$
	$\Diamond \Diamond A \to \Diamond A$	$\Diamond \Diamond\Diamond A \to \Diamond\Diamond A$	$\Diamond \Diamond\Box A \to \Diamond\Box A$

۵. در C5، ثابت کنید:

5	$\Diamond A \to \Box \Diamond A$	$\Diamond\Diamond A \to \Box\Diamond\Diamond A$	$\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box A$
	$\Diamond \Box A \to \Box A$	$\Diamond\Box\Diamond A \to \Box\Diamond A$	$\Diamond\Box\Box A \to \Box\Box A$

۶. در CT4، ثابت کنید:

$\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Diamond A$	$\Box A \leftrightarrow \Box\Box A$
$\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Diamond\Box A$	$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Box\Diamond A$

۷. در CD45، ثابت کنید:

$\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond A$	$\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box A$
$\Diamond\Box A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box A$	$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond A$
$\Box A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box A$	$\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond A$
$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$	$\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box A$
$\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$	$\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box A$

۸. در CTB، ثابت کنید:

$A \to \Diamond\Box\Diamond A$	$A \to \Box\Diamond\Diamond A$
$\Box\Diamond\Box A \to A$	$\Diamond\Box\Box A \to A$
$\Box\Diamond\Box A \to \Diamond\Box\Diamond A$	$\Diamond\Box\Box A \to \Box\Diamond\Diamond A$

گسترش‌های منطق M

در MT5، برهان 4 بسیار ساده می‌شود:

در MT5: $\Box A \to \Box\Box A$ 4

برهان:

1.		$\Box A$	مقدمه
2.		$\Diamond\Box A$	T
3.		$\Box\Diamond\Box A$	5
4.	$\Box$	$\Diamond\Box A$	
5.		$\Box A$	5
6.		$\Box\Box A$	

در MB4، MB5 و MDB5، می‌توان، به ترتیب، قاعده‌های 5، 4 و T را ثابت کرد:

در MB4: $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ 5

برهان:

1.		$\Diamond A$	مقدمه
2.		$\Box\Diamond\Diamond A$	B
3.	$\Box$	$\Diamond\Diamond A$	
4.		$\Diamond A$	4
5.		$\Box\Diamond A$	

در MB5: $\Box A \to \Box\Box A$ 4

برهان:

1.		$\Box A$	مقدمه
2.		$\Box\Diamond\Box A$	B
3.	$\Box$	$\Diamond\Box A$	
4.		$\Box A$	5
5.		$\Box\Box A$	

در MDB5: $\Box A \to A$ T

برهان:

1.		$\Box A$	مقدمه
2.		$\Box\Diamond\Box A$	B
3.	$\Box$	$\Diamond\Box A$	
4.		$\Box A$	5
5.		$\Box\Box A$	
6.		$\Diamond\Box A$	D
7.		A	B

بر اساس برهان‌های بالا، از ۱۸ گسترش یاد شده برای C، سه گسترش به گسترش‌های دیگر فرومی‌کاهند (نظام آخر به نظام پیش از آن، و نظام‌های شماره ۱۲ و ۱۳ به نظام ۱۱ تقلیل می‌یابند) و بنابراین، ۱۵ گسترش برای M خواهیم داشت. این نظام‌ها را در جدول زیر، به نمایش گذاشته‌ایم:

همه ترکیب‌های ممکن از افزودن قواعد پنج‌گانهٔ D، T، B، 4 و 5 به نظام M

تعداد قواعد / شماره	۰	۱	۲	۳	۴	۵	تعداد ترکیب قواعد
۱	M						۱
۲		MD					۱
۳		MB					۱
۴		M4					۱
۵		M5					۱
۶			**MT** = MDT				۲
۷			MDB				۱
۸			MD4				۱
۹			MD5				۱
۱۰			M45				۱
۱۱				**MB4** = **MB5** = MB45			۳
۱۲				MD45			۱
۱۳				**MTB** = MDTB			۲
۱۴				**MT4** = MDT4			۲
۱۵						**MT5** = **MTB4** = **MDB4** = MTB45 = **MDB5** = MDB45 = MT54 = MDTB4 = MT5B = MDT45 = MT5D = MDTB5 = MDTB45	۱۳
جمع	۱ +	۵ +	۱۰ +	۱۰ +	۵ +	۱ =	۳۲

چنان که می‌بینیم، ۱۰ نظام از نظام‌های بالا، متناظر با تنها یکی از ترکیبات ۳۲ گانه هستند و پنج نظام باقی‌مانده، با ترکیب‌های گوناگونی می‌توانند نشان داده شوند. در هر یک از این پنج نظام، ترکیب‌هایی که همه قواعدشان مستقل از دیگر قواعد است و امکان ساده‌تر شدن را ندارند، با خطی زیر آنها معین شده‌اند.

گسترش‌های M به کمک قاعده‌های B و 5، منطق‌های ضروری‌اند زیرا می‌توان در آنها قاعده N را اثبات کرد. برای اثبات N، ابتدا قاعده زیر را (که می‌گوید ضرورت قضایا از ضرورت هر گزاره‌ای نتیجه می‌شود) در M اثبات می‌کنیم:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Box B \to \Box A}$$

برهان:

$\vdash$	A	فرض
$\vdash$	$B \to A$	
$\vdash$	$\Box B \to \Box A$	

اکنون، توجه کنید که قاعده‌های B و 5 فرمول‌های زیر را نتیجه می‌دهند:

$\Diamond A \to \Box\Diamond A$
$\Diamond A \to \Box\Diamond\Diamond A$

و این دو، معادل هستند با

$\Box \sim A \vee \Box\Diamond A$
$\Box \sim A \vee \Box\Diamond\Diamond A$

و این دو فرمول، به کمک قاعده بالا، ضرورت قضایا را نتیجه می‌دهند:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Box A}$$

بنابراین، گسترش M به کمک B یا 5 به منطق‌های ضروری منتهی می‌شود و بنابراین، برابر است با گسترش P به کمک B یا 5. این نتیجه را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

1.	M		P
2.	MD		PD
3.	MB	=	PB
4.	M4		P4
5.	M5	=	P5
6.	MT		PT
7.	MDB	=	PDB
8.	MD4		PD4
9.	MD5	=	PD5
10.	M45		P45
11.	MB4	=	PB4
12.	MD45	=	PD45
13.	MTB	=	PTB
14.	MT4		PT4
15.	MT5	=	PT5

هم‌چنین، از این گسترش‌ها، نظام‌های شامل D، منطق‌های ممکن هستند زیرا در آنها، می‌توان $\Diamond(A \to A)$ را اثبات کرد:

برای اثبات این، ابتدا قاعده زیر را (که می‌گوید امکان قضایا از امکان هر گزاره‌ای نتیجه می‌شود) در M اثبات می‌کنیم:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Diamond B \to \Diamond A}$$

برهان:

$\vdash A$ فرض

$\vdash B \to A$

$\vdash \Diamond B \to \Diamond A$

اکنون، توجه کنید که قاعده‌های B و 5 فرمول‌های زیر را نتیجه می‌دهند:

$\Box A \to \Diamond A$

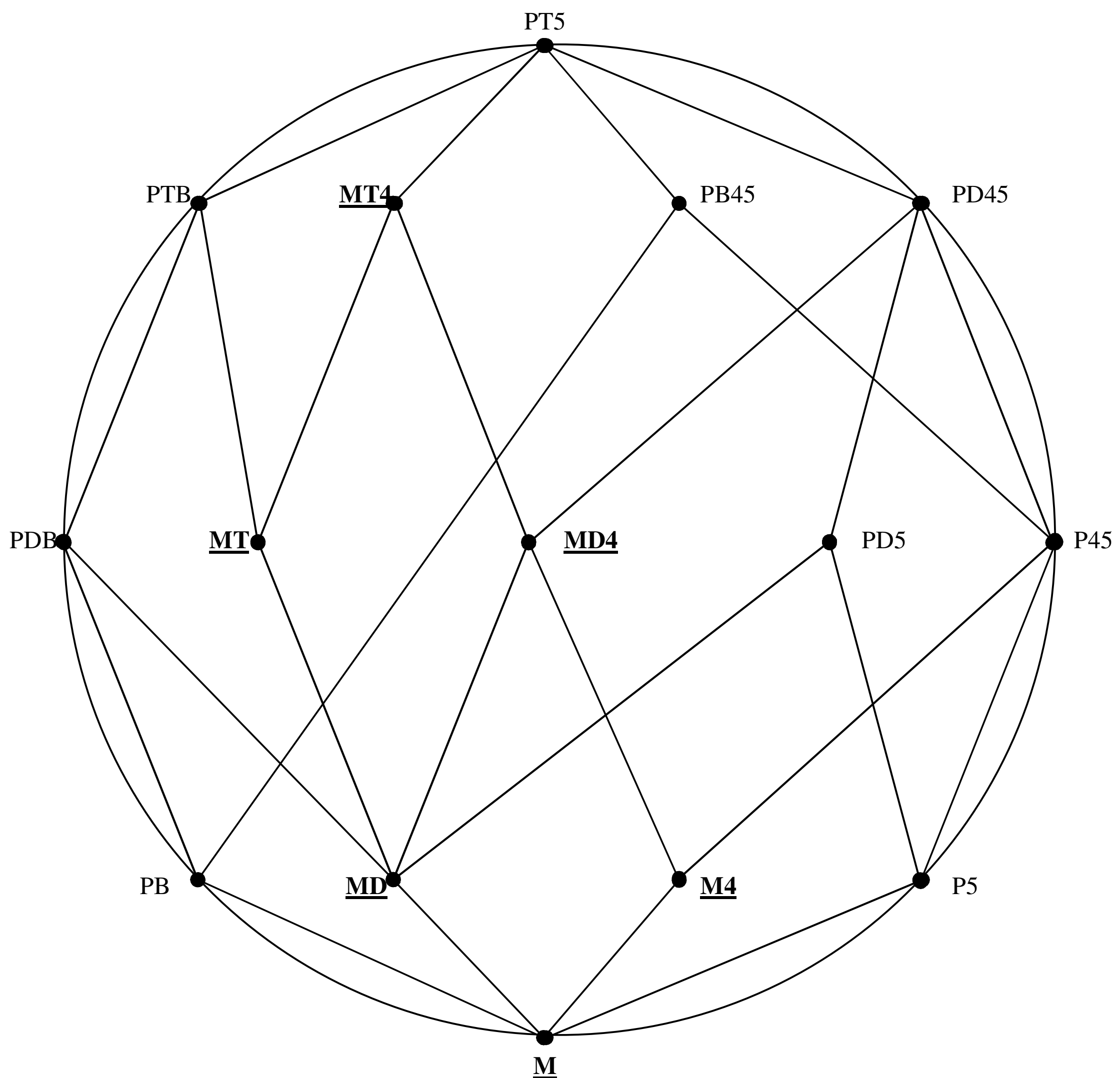
$\Diamond \sim A \vee \Diamond A$

و فرمول اخیر، به کمک قاعده بالا، امکان قضایا را نتیجه می‌دهند:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \Diamond A}$$

بنابراین، از گسترش‌های M، ۹ نظام، ضروری، ۹ نظام، ممکن و ۵ نظام، ضروری و ممکن هستند.

نمودار گسترش‌های M به صورت زیر است.



در این نمودار، منطق‌های غیرضروری را برجسته کرده‌ایم. منطق MD و منطق‌های شامل آن نیز همگی ممکن هستند.

تمرین:

توجه: فرمول‌های ستاره‌دار، قضایای نسبتا مهم هستند.

۱. در MD، ثابت کنید:

$\Diamond(\Box A \to \Diamond A)$	$\Diamond(A \to A)$	$\Diamond(A \vee \sim A)$
$\Diamond(\sim\Diamond A \to \Diamond \sim A)$	$\Diamond\Diamond(A \to A)$	$\Diamond\Diamond(A \vee \sim A)$
$\sim\Box(\Box A \wedge \Box \sim A)$	$\Diamond\Diamond\Diamond(A \to A)$	$\Diamond\Diamond\Diamond(A \vee \sim A)$
	$\Diamond(\Diamond A \to \Diamond A)$	$\Diamond(\Diamond A \vee \Diamond \sim A)$
$\Diamond\Box A \to \Diamond\Diamond A$	$\Diamond[A \to (B \to A)]$	$\Diamond[(A \wedge B) \to A]$
$\Box\Box A \to \Box\Diamond A$	$\Diamond[A \to (B \to A \wedge B)]$	$\Diamond[\Diamond(A \wedge B) \to \Diamond A]$
$\Box\Box A \to \Diamond\Diamond A$	$\Diamond[(A \wedge B) \to (A \to B)]$	$\Diamond[\Diamond A \to \Diamond(A \vee B)]$
$\Box A \to \Diamond(B \to A)$	$(\Diamond A \to \Box B) \to \Diamond(A \to B)$	$\Diamond(\Box A \to \Diamond(B \to A))$
$\Box \sim A \to \Diamond(A \to B)$		$\Diamond(\Box \sim A \to \Box(A \to B))$

۲. در MT، ثابت کنید:

$\Diamond\Box A \to \Diamond A$		$\Diamond(\Box A \to A)$	$\Box(A \to \Box B) \to \Box(\Box A \to B)$
$\Box A \to \Box\Diamond A$		$\Diamond(A \to \Diamond A)$	$\Box(A \wedge \Box B) \to (\Box A \wedge \Box B)$
$\Box\Diamond\Box A \to \Diamond\Box\Diamond A$		$\Diamond(\Box A \to \Diamond A)$	$\Box(A \wedge \Box B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
			$\Diamond(A \wedge \Box B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
	*	$\Diamond(A \to \Box A)$	$(\Diamond A \vee \Diamond B) \to \Diamond(A \vee \Diamond B)$
	*	$\Diamond(\Diamond A \to A)$	$(\Box A \vee \Box B) \to \Diamond(A \vee \Diamond B)$

۳. در MB (= PB)، ثابت کنید:

	$\Diamond\Diamond\Box A \to \Diamond A$	*	$\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond A$
	$\Box A \to \Box\Box\Diamond A$	*	$\Box\Diamond\Box A \leftrightarrow \Box A$
	$\Diamond\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Diamond A$	*	$\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box A$
	$\Diamond\Box\Box A \to \Box\Box\Diamond A$	*	$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$
			$(\Box A \vee B) \to \Box(A \vee \Diamond B)$
			$(\Diamond A \to B) \to \Box(A \to \Diamond B)$
			$(A \to \Box B) \to \Box(\Box A \to B)$
			$\Diamond(\Box A \wedge B) \to (A \wedge \Diamond B)$
G1	$\Diamond\Box A \to \Box\Diamond A$		
$\Box$D	$\Box(\Box A \to \Diamond A)$	*	$\vdash A \to \Box B$ اتا $\vdash \Diamond A \to B$
$\Box$	$\Box(A \to A)$	I	$A \prec A$
	$\Box\Box(A \to A)$		$\Box(A \prec A)$
	$\Box\Box\Box(A \to A)$		$\Box\Box(A \prec A)$
	$\Box[A \to (B \to A)]$		$A \prec (B \to A)$
	$\Box[A \to (B \to A \wedge B)]$		$A \prec (B \to A \wedge B)$
	$\Box[(A \wedge B) \to (A \to B)]$		$(A \wedge B) \prec (A \to B)$

۴. در M4، ثابت کنید:

$\Diamond\Box A \to \Diamond\Box\Box A$
$\Box\Diamond\Diamond A \to \Box\Diamond A$

$\Box\Diamond\Diamond A \to \Box\Box\Diamond A$	$\Diamond\Diamond\Box A \to \Diamond\Box\Box A$
$\Box\Diamond\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box A$	$\Diamond\Box\Diamond A \to \Diamond\Box\Box\Diamond A$
$\Box\Diamond\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box\Box A$	$\Diamond\Box\Diamond\Diamond A \to \Diamond\Box\Box\Diamond A$
$\Box\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box\Box A$	$\Diamond\Box\Diamond\Diamond A \to \Diamond\Box\Diamond A$

$(\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee \Box B)$	$\Diamond(A \wedge \Diamond B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
$(\Box A \vee \Box B) \to \Box(\Box A \vee \Box B)$	$\Diamond(\Diamond A \wedge \Diamond B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$

۵. در M5 (= P5)، ثابت کنید:

5	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$		$\Diamond\Box A \to \Box A$	
*	$\Box(A \to \Diamond A)$	*	$\Box(\Box A \to A)$	$\Box$T
5	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$		$\Diamond\Box A \to \Box A$	
	$\Box\Diamond A \to \Box\Box\Diamond A$		$\Diamond\Diamond\Box A \to \Diamond\Box A$	
	$\Diamond A \to \Box\Box\Diamond A$		$\Diamond\Diamond\Box A \to \Box A$	
*	$\Box(A \to \Box\Diamond A)$	*	$\Box(\Diamond\Box A \to A)$	$\Box$B
5	$\Diamond A \to \Box\Diamond A$		$\Diamond\Box A \to \Box A$	
	$\Diamond\Diamond A \to \Diamond\Box\Diamond A$		$\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box A$	
C5	$\Diamond\Box\Diamond A \to \Box\Diamond A$	C5	$\Diamond\Box A \to \Box\Diamond\Box A$	
	$\Diamond\Diamond A \to \Box\Diamond A$		$\Diamond\Box A \to \Box\Box A$	
	$\Diamond\Diamond\Diamond A \to \Diamond\Box\Diamond A$		$\Box\Diamond\Box A \to \Box\Box\Box A$	
	$\Diamond\Diamond\Diamond A \to \Box\Diamond A$		$\Diamond\Box A \to \Box\Box\Box A$	
*	$\Box(\Diamond\Diamond A \to \Diamond A)$	*	$\Box(\Box A \to \Box\Box A)$	$\Box$4
	$\Diamond\Diamond A \to \Box\Diamond A$		$\Diamond\Box A \to \Box\Box A$	
	$\Box\Diamond\Diamond A \to \Box\Box\Diamond A$		$\Diamond\Diamond\Box A \to \Diamond\Box\Box A$	
	$\Diamond\Diamond A \to \Box\Box\Diamond A$		$\Diamond\Diamond\Box A \to \Box\Box A$	
*	$\Box(\Diamond A \to \Box\Diamond A)$	*	$\Box(\Diamond\Box A \to \Box A)$	$\Box$5
	$\Diamond(A \wedge B) \to \Box(\Diamond A \wedge \Diamond B)$		$\Diamond(\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$	
$\Box$	$\Box(A \to A)$	I	$A \prec A$	
	$\Box\Box(A \to A)$		$\Box(A \prec A)$	
	$\Box\Box\Box(A \to A)$		$\Box\Box(A \prec A)$	
	$\Box[A \to (B \to A)]$		$A \prec (B \to A)$	
	$\Box[A \to (B \to A \wedge B)]$		$A \prec (B \to A \wedge B)$	
	$\Box[(A \wedge B) \to (A \to B)]$		$(A \wedge B) \prec (A \to B)$	

۶. در MD4، ثابت کنید:

$\Diamond\Box\Diamond A \to \Diamond A$　　　$\Box A \to \Box\Diamond\Box A$

گسترش‌های منطق R

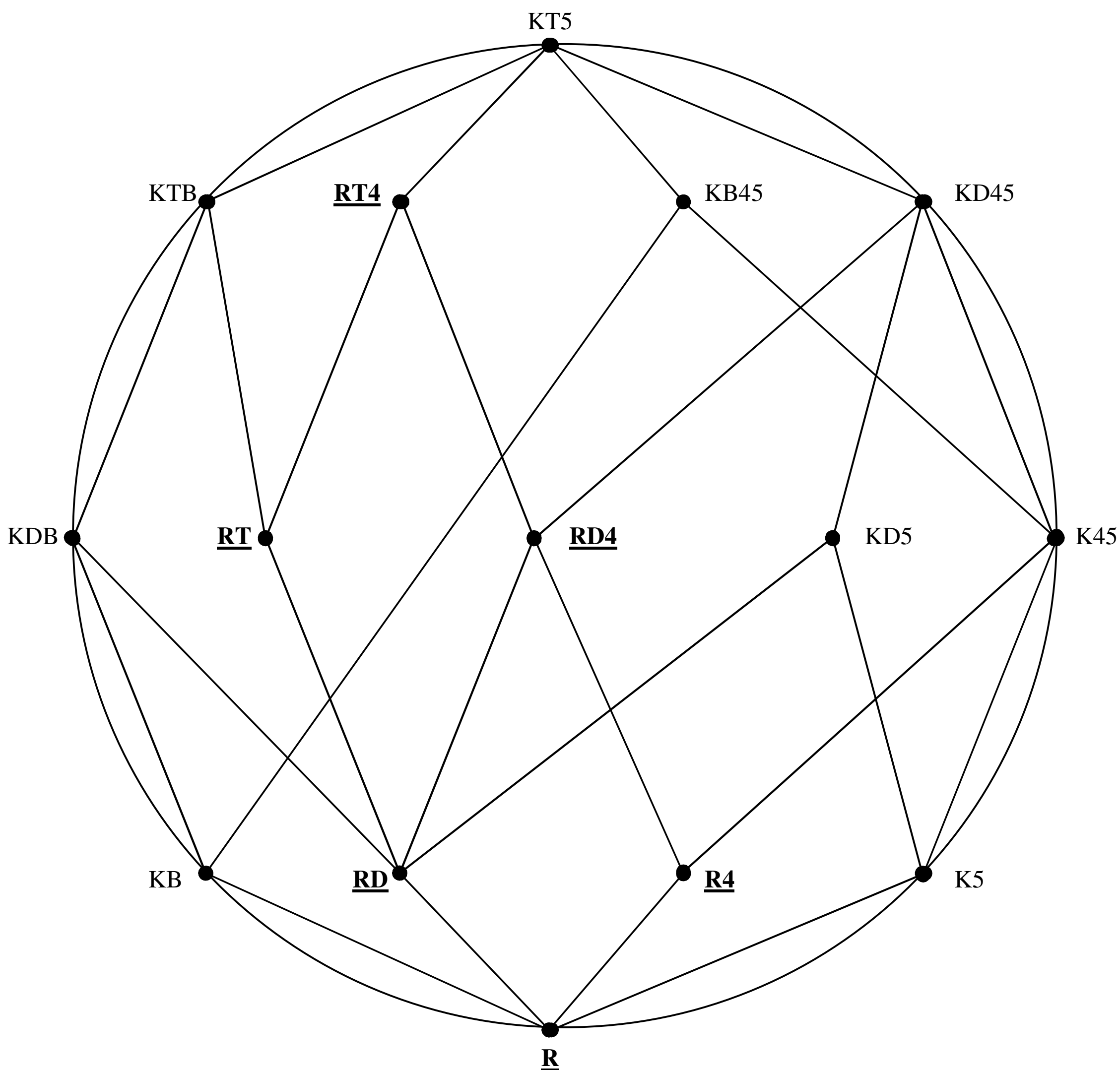
تعداد گسترش‌های R با قاعده‌های پنج‌گانه مانند M برابر است با همان عدد ۱۵. آشکار است که در اینجا، گسترش R با B یا 5 برابر است با گسترش K با این دو قاعده. بنابراین، داریم:

16.	R		K		
17.	RD		KD	=	D
18.	RB	=	KB		
19.	R4		K4		
20.	R5	=	K5		
21.	RT		KT	=	T
22.	RDB	=	KDB		
23.	RD4		KD4		
24.	RD5	=	KD5		
25.	R45		K45		
26.	RB4	=	KB4		
27.	RD45	=	KD45		
28.	RTB	=	KTB	=	B
29.	RT4		KT4	=	S4
30.	RT5	=	KT5	=	S5

و در نتیجه، ۹ نظام، ضروری، ۹ نظام، ممکن و ۵ نظام، ضروری و ممکن هستند.

نام‌هایی که در ستون سمت راست کنار بعضی نظام‌ها نوشته شده، نام معروف آن نظام‌هاست. S4 و S5 دو منطق از منطق‌های لویس است. نام B برای قاعده B و منطق B برگرفته از حرف آغازین از نام منطق‌دان شهیر هلندی، بروار، است. براور، قانون نقض مضاعف را به صورت هم‌ارزی نمی‌پذیرد و تنها صورت معرفی آن را قبول دارد. در منطق B، نیز می‌توان اصل $A \to \Box\Diamond A$ را اثبات کرد که بنا به تعریف $\Diamond$، معادل است با $A \to \Box \sim \Box \sim A$ و این بنا به تعریف $\neg$، معادل است با $A \to \neg\neg A$ که مشابه قانون معرفی نقض مضاعف و مورد قبول براور است.

نمودار گسترش‌های R به صورت زیر است.



در اینجا نیز، منطق‌های غیرضروری را برجسته کرده‌ایم.

تمرین:

۱. در RD، ثابت کنید:

$[\Box(A \to B) \wedge \Box A] \to \Diamond B$ $\qquad$ $\Diamond A \vee \Diamond B \vee \Diamond(A \downarrow B)$

$[(A \prec B) \wedge \Box A] \to \Diamond B$ $\qquad$ $\Diamond A \vee \Diamond B \vee \Diamond(\sim A \wedge \sim B)$

$$\begin{array}{l} \Box A \\ \Box \sim C \rightarrow \Box (\sim A \wedge \sim B) \\ \hline \Diamond C \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \prec (B \prec C) \\ A \prec B \\ \hline A \prec B \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Box (A \rightarrow B) \\ \Box (A \rightarrow \Box C) \\ \Box (B \rightarrow \Box \sim C) \\ \hline \Box \sim A \end{array} \qquad \begin{array}{l} (A \prec B) \\ (A \prec \Box C) \\ (B \prec \Box \sim C) \\ \hline \Box \sim A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (A \prec B) \\ (B \prec A) \\ \hline \Diamond (A \wedge B) \vee \Diamond (A \downarrow B) \end{array} \qquad \begin{array}{l} (A \prec B) \\ (B \prec A) \\ \hline \Diamond (A \wedge B) \vee \Diamond (\sim A \wedge \sim B) \end{array}$$

۲. در RT، ثابت کنید:

$$\begin{array}{l} \Box A \\ B \prec \Box C \\ \Box (A \prec B) \\ \hline \Box C \end{array} \qquad \begin{array}{l} (A \wedge B) \prec \Box C \\ \hline \Box B \rightarrow (A \prec C) \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \prec (B \prec C) \\ \hline (A \wedge B) \prec C \\ \Box B \rightarrow (A \prec C) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A \prec \Box B \\ C \prec \Box D \\ \Box A \vee \Box C \\ \hline \Box B \vee \Box D \end{array} \qquad \begin{array}{l} (A \wedge B) \prec \Box C \\ \Box B \\ \hline A \prec C \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \prec B \\ B \prec \Box C \\ A \rightarrow \sim C \\ \hline \sim A \end{array}$$

۳. در RB (= KB)، ثابت کنید:

* $\Box\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$
* $\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond\Diamond A$

$\Box (A \rightarrow \Box B) \rightarrow \Box (A \rightarrow \Diamond B))$ $\qquad$ $\Box (A \rightarrow \Box B) \rightarrow (\Diamond A \rightarrow B))$
$\Box (\Diamond A \rightarrow B) \rightarrow \Box (\Box A \rightarrow B))$ $\qquad$ $\Box (\Diamond A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \Box B))$

$\Diamond (\Box A \wedge B) \rightarrow \Diamond (\Diamond A \wedge B))$ $\qquad$ $(\Diamond A \wedge B) \rightarrow \Diamond (A \wedge \Diamond B)$
$\Diamond (A \wedge \Box B) \rightarrow \Diamond (A \wedge \Diamond B))$ $\qquad$ $(A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond (\Diamond A \wedge B)$

$\Box (\Box A \vee B) \rightarrow \Box (\Diamond A \vee B))$ $\qquad$ $\Box (\Box A \vee B) \rightarrow (A \vee \Box B))$
$\Box (A \vee \Box B) \rightarrow \Box (A \vee \Diamond B))$ $\qquad$ $\Box (A \vee \Box B) \rightarrow (\Box A \vee B))$

۴. در R4، ثابت کنید:

* $\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Box A$
* $\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Diamond A$
* $\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box A$
* $\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$

$\Box(A \vee B) \rightarrow \Box(\Box A \vee \Diamond B)$
$(\Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box(\Box A \vee \Diamond B)$
$(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge \Box B)$
$\Box(A \vee \Diamond B) \rightarrow (\Box A \vee \Diamond B)$

$\Diamond(\Diamond A \wedge \Box B) \rightarrow \Diamond(A \wedge B)$
$\Diamond(\Diamond A \wedge \Box B) \rightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
$\Diamond(A \vee \Diamond B) \rightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$
$(\Diamond A \wedge \Box B) \rightarrow \Diamond(A \wedge \Box B)$

۵. در R5 (= K5)، ثابت کنید:

$\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$
$\Box\Diamond A \rightarrow \Box\Box\Diamond A$
$\Diamond A \rightarrow \Box\Box\Diamond A$
$\Diamond\Diamond A \rightarrow \Box\Diamond A$

$\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$
$\Diamond\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond\Box A$
$\Diamond\Diamond\Box A \rightarrow \Box A$
$\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Box A$

$\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Diamond\Diamond A$
$\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond A$
$\Diamond\Diamond\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond A$

$\Box\Box A \leftrightarrow \Box\Box\Box A$
$\Box\Box A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box A$
$\Box\Diamond\Box A \leftrightarrow \Box\Box\Box A$

$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Diamond A$
$\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Box\Diamond A$
$\Box\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Diamond A$

$\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Box A$
$\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Diamond\Box A$
$\Diamond\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Box A$

$\Diamond\Box A \rightarrow (\Box A \wedge \Diamond\Box A)$
$\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond(A \wedge \Box A)$
$\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond A$
G1 $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$
$\Box$D $\Box(\Box A \rightarrow \Diamond A)$
$\Box\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$
4_C $\Box\Box A \rightarrow \Box A$
$\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond A$

$(\Box\Diamond A \vee \Diamond A) \rightarrow \Box\Diamond A$
$\Box(\Diamond A \vee A) \rightarrow \Box\Diamond A$
* $\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$
* $\Diamond\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$
$\Box(\Box A \rightarrow \Diamond A)$
$\Diamond\Box A \rightarrow \Diamond\Diamond A$
$\Diamond A \rightarrow \Diamond\Diamond A$
$\Box A \rightarrow \Box\Diamond A$

Lem $(\Box A \prec B) \vee (\Box B \prec A)$
Lem_0 $(\Box A \prec (A \rightarrow B)) \vee (\Box B \prec (B \rightarrow A))$

* $\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Box A$
* $\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Diamond A$
* $\Diamond\Box A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond\Box A$
* $\Box\Diamond A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box\Diamond A$

$\Diamond(\Box A \vee \Box B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$
$(\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Box(\Diamond A \wedge \Diamond B)$
$\Box(A \vee \Box B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$
$\Box(\Box A \vee \Box B) \rightarrow (\Box A \vee \Box B)$
$\Box(A \wedge \Box B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

$\Diamond(A \wedge \Box B) \rightarrow (\Diamond A \wedge \Box B)$
$(\Box A \vee \Diamond B) \rightarrow \Box(A \vee \Diamond B)$
$(\Diamond A \vee \Diamond B) \rightarrow \Diamond(\Diamond A \wedge B)$
$(\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(\Diamond A \wedge B)$
$(\Diamond A \wedge \Diamond B) \rightarrow \Diamond(\Diamond A \wedge \Diamond B)$

۶. در R45 (= K45)، ثابت کنید:

$\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Diamond A$
$\Diamond A \leftrightarrow \Diamond\Box\Diamond A$

$\Box A \leftrightarrow \Box\Box A$
$\Box A \leftrightarrow \Box\Diamond\Box A$

$(\Box A \vee \Box B) \leftrightarrow \Box(A \vee \Box B)$	$\Diamond(A \wedge \Diamond B) \leftrightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
$(\Box A \vee \Box B) \leftrightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$	$\Diamond(\Diamond A \wedge \Diamond B) \leftrightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
$(\Box A \vee \Box B) \leftrightarrow \Box(\Box A \vee \Diamond B)$	$\Diamond(\Diamond A \wedge \Box B) \leftrightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B)$
$(\Box A \wedge \Box B) \leftrightarrow \Box(A \wedge \Box B)$	$\Diamond(A \vee \Diamond B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Diamond B)$
$\Box(A \vee \Diamond B) \leftrightarrow (\Box A \vee \Diamond B)$	$(\Diamond A \wedge \Box B) \leftrightarrow \Diamond(A \wedge \Box B)$
$(\Box A \vee \Diamond B) \leftrightarrow \Box(\Box A \vee \Diamond B)$	$\Diamond(\Diamond A \wedge \Box B) \leftrightarrow (\Diamond A \wedge \Box B)$
$(\Box A \wedge \Diamond B) \leftrightarrow \Diamond(\Box A \wedge \Diamond B)$	$\Box(\Diamond A \vee \Box B) \leftrightarrow (\Diamond A \vee \Box B)$
$\Box(\Box A \vee B) \leftrightarrow \Box(A \vee \Box B)$	$\Diamond(\Diamond A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge \Diamond B)$
$\Box(\Diamond A \to B) \leftrightarrow \Box(A \to \Box B)$	$\Diamond(\Diamond A \wedge B) \leftrightarrow (A \wedge \Diamond B)$
$\Box(\Box A \vee B) \to \Box(A \vee \Diamond B)$	$\Diamond(\Diamond A \wedge B) \to (A \wedge \Diamond B)$

۷. در RT4، ثابت کنید:

$\Box(A \vee \Diamond B) \leftrightarrow \Box(\Box A \vee \Diamond B)$

$\Diamond(A \wedge \Box B) \leftrightarrow \Diamond(\Diamond A \wedge \Diamond B)$

$(\Box A \prec B) \leftrightarrow (\Box A \prec \Box B)$

$$\frac{A \prec (B \prec C)}{(A \prec B) \prec (A \prec C)}$$

۸. در RD45، ثابت کنید:

$\Box(A \vee \Diamond B) \leftrightarrow (\Box A \vee \Diamond B)$ $\qquad$ $\Diamond(A \wedge \Box B) \leftrightarrow (\Diamond A \wedge \Diamond B)$

۹. تعریف‌های زیر را در نظر بگیرید:

$\boxdot A =_{\text{تع}} A \wedge \Box A$

$4 =_{\text{تع}} A \wedge (\Box A \to \Box\Box A)$

$W =_{\text{تع}} \Box(\Box A \to A) \to \Box A$

$J =_{\text{تع}} \Box[\Box(A \to \Box A) \to A] \to A$

و قضایای زیر را در منطق‌های معین شده اثبات کنید:

$PC^{\Box}$	$[\boxdot(A \to \boxdot A) \to A] \to [\Box(A \to \boxdot A) \to A]$	
$PC^{\Box}$	$\boxdot[\boxdot(A \to \boxdot A) \to A] \to [\Box(A \to \boxdot A) \to A]$	
R4	$\boxdot[\boxdot(A \to \boxdot A) \to A] \to \Box[\Box(A \to \boxdot A) \to (A \to \boxdot A)]$	
RW	$\boxdot[\boxdot(A \to \boxdot A) \to A] \to A$	بولوس ۱۹۹۳ ص ۱۶۴

$PC^{\Box}$	$(4 \to \Box A) \to (A \to \Box A)$	
M	$(4 \to \Box 4) \to (A \to \Box A)$	
R	$\Box(4 \to \Box 4) \to (A \to \Box A)$	
R	$\Box A \to [\Box(4 \to \Box 4) \to 4]$	
RJ	$\Box A \to 4$	
RJ	$\Box A \to \Box\Box A$	بولوس ۱۹۹۳ ص ۱۵۷

گسترش‌های منطق N

۱۰. در ND، ثابت کنید:

$\Box(\Box A \to \Diamond A)$	$\Box A \prec \Diamond A$
$\Box(\sim\Diamond A \to \Diamond \sim A)$	$\sim\Diamond A \prec \Diamond \sim A$
$\Box \sim(\Box A \wedge \Box \sim A)$	$\neg(\Box A \wedge \Box \sim A)$

۱۱. در NT، ثابت کنید:

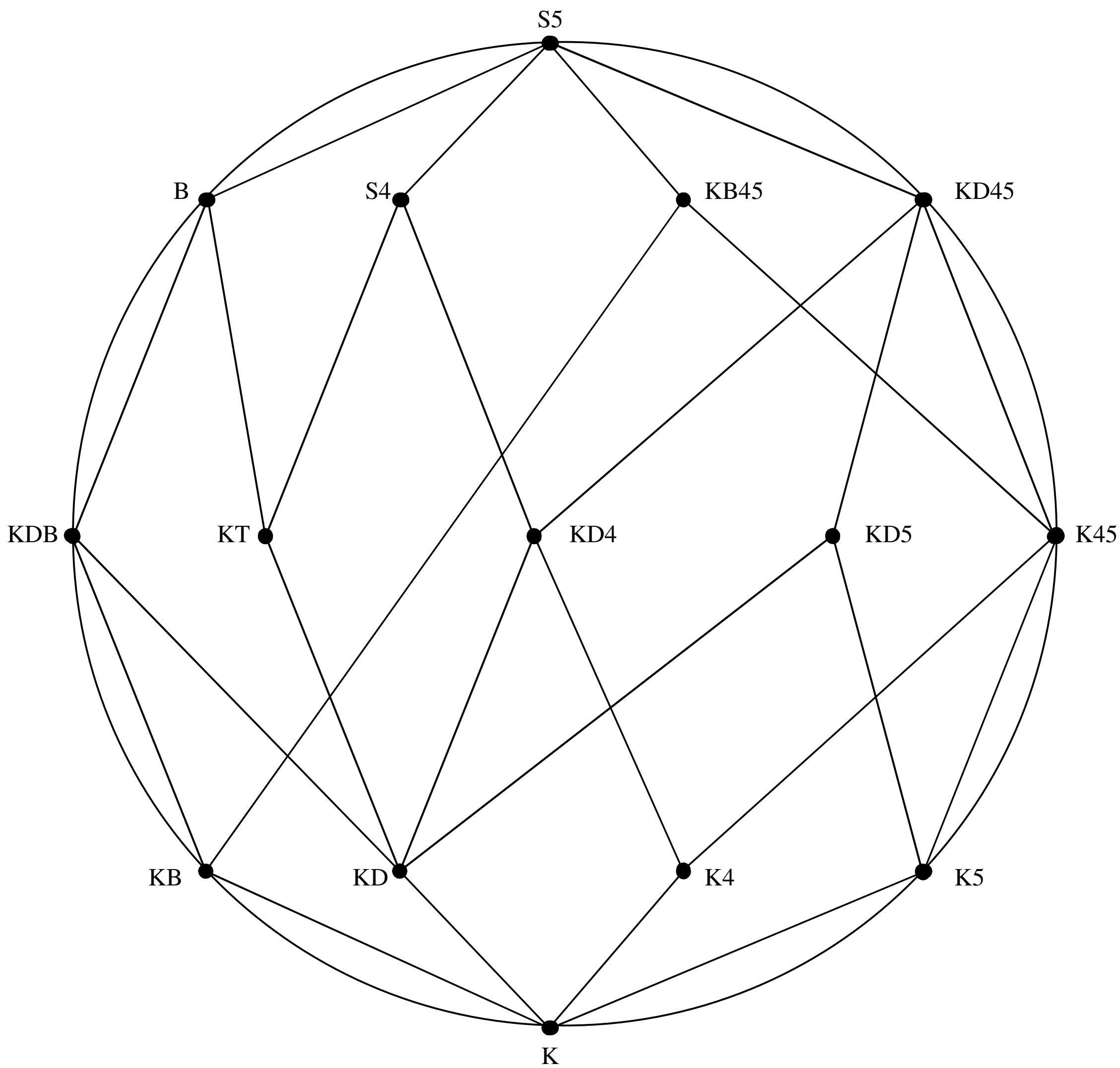
$\Box(\Box A \to A)$	$\Box A \prec A$
$\Box(A \to \Diamond A)$	$A \prec \Diamond A$
$\Box(\Box A \to \Diamond A)$	$\Box A \prec \Diamond A$

۱۲. در N4، ثابت کنید:

4	$\Box A \prec \Box\Box A$	$\Box\Box A \prec \Box\Box\Box A$	$\Box\Diamond A \prec \Box\Box\Diamond A$
	$\Diamond\Diamond A \prec \Diamond A$	$\Diamond\Diamond\Diamond A \prec \Diamond\Diamond A$	$\Diamond\Diamond\Box A \prec \Diamond\Box A$

گسترش‌های منطق K

نمودار گسترش‌های K به صورت زیر است.



چنان‌که در نمودار دیده می‌شود، منطق‌های میان K و S5 به سه بخش تقسیم می‌شوند:

الف: چهار نظام نزدیک به S5؛

ب: چهار نظام نزدیک به K؛

ج: پنج نظام میانه.

از سوی دیگر، نکته دیگری که در این نمودار، به چشم می‌خورد این است که ترکیب هر دو نظام از این نمودار، برابر است با اولین نظامی که در تقاطع خطوط بالارونده از آن دو نظام قرار دارد. برای نمونه، ترکیب KB با K5 برابر است با KB45 و ترکیب KD4 و KB برابر است با S5.

۱۳. در KT، ثابت کنید:

$\Box [(A \wedge \Box (A \to B)) \to B]$ * $\Diamond (A \leftrightarrow \Box A)$

W* $(A \wedge (A \prec B)) \prec B$ * $\Diamond (\Diamond A \leftrightarrow A)$

قاعده 3

شباهت قاعده 3 به K و X:

K $$\frac{\Box (A \to B)}{\Box A \to \Box B}$$ **3** $$\frac{\Box (A \to B)}{\Box (\Box A \to \Box B)}$$

تعدی ضروری

X $$\frac{\Box (A \to B)}{\Box (B \to C) \to \Box (A \to C)}$$ **3′** $$\frac{\Box (A \to B)}{\Box [\Box (B \to C) \to \Box (A \to C)]}$$

که می‌توان به صورت ساده‌تر زیر آنها را بازنویسی کرد:

K $$\frac{A \prec B}{\Box A \to \Box B}$$ **3** $$\frac{A \prec B}{\Box A \prec \Box B}$$

X $$\frac{A \prec B}{(B \prec C) \to (A \prec C)}$$ **3′** $$\frac{A \prec B}{(B \prec C) \prec (A \prec C)}$$

تمرین:

۱. در C، قاعده ′3 مستلزم قاعده 3 است یعنی $C3 \subseteq C3'$. (راهنمایی: به جای C، تناقض بگذارید.)

۲. در M، قاعده 3 معادل قاعده ′3 است یعنی $M3 = M3'$.

(راهنمایی: $A \to B$ مستلزم $(B \to C) \to (A \to C)$ است.)

۳. در R، قاعده 4 مستلزم قاعده 3 است یعنی $R4 \subseteq R3$.

۴. در K، قاعده 3 معادل قاعده 4 است یعنی $K3 = K4$.

۵. در N، قاعده 3 مستلزم قاعده 4 است یعنی $N3 \subseteq N4$.

۶. در NT، قاعده 3 مستلزم قاعده 4 است یعنی $NT3 = KT4 = S4 \subseteq NT4$.

اهمیت قاعده 3 در این است که منطق لویس S3 شبه منطقِRT3 است چنان که S2 شبه منطقِ RT است. به عبارت ساده‌تر:

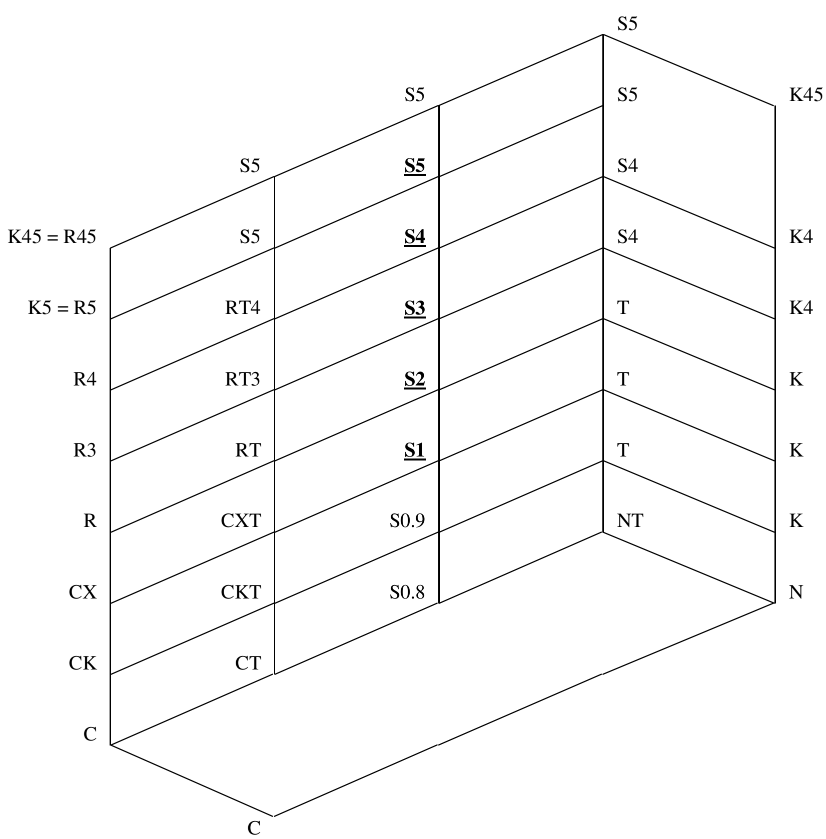
$\vdash_{RT3} \Box(A \rightarrow A) \rightarrow B$ اتا $\Box(A \rightarrow A) \vdash_{RT3} B$ اتا $\vdash_{S3} B$

$\vdash_{RT} \Box(A \rightarrow A) \rightarrow B$ اتا $\Box(A \rightarrow A) \vdash_{RT} B$ اتا $\vdash_{S2} B$

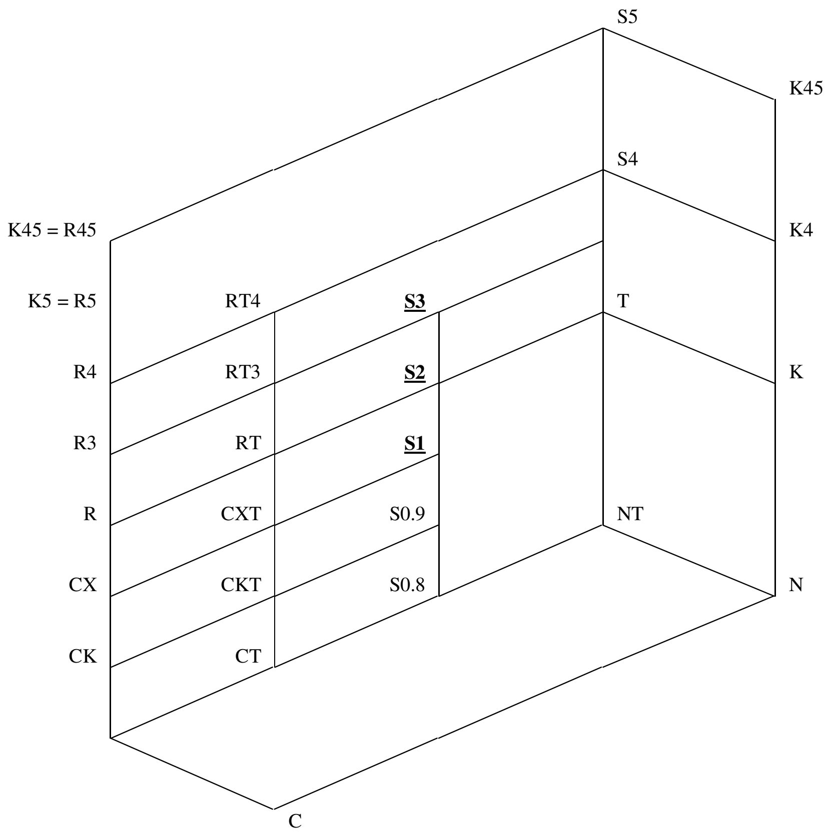
به عبارتی دیگر، قضایای S3 نتایج $\Box(A \rightarrow A)$ در منطق RT3 است. شبیه این حکم برای S1 و CXT برقرار است:

$\vdash_{CXT} \Box(A \rightarrow A) \rightarrow B$ اتا $\Box(A \rightarrow A) \vdash_{CXT} B$ اتا $\vdash_{S1} B$

مشابه این حکم برای دیگر نظام‌های لویس نیز برقرار است. منطق‌های لویس و همسایه‌های آن را در نمودار زیر نمایش داده‌ایم:



و با حذف موارد تکراری، نمودار به صورت زیر در می‌آید:



نظام‌های اصل موضوعی

همه منطق‌های وجهی گفته شده، گسترش منطق گزاره‌ها، PC، هستند و بنابراین، اصول موضوعه و قواعد اصلی آنها در منطق‌های گفته‌شده حضور دارند و تعدادی اصل موضوع یا قاعده به آنها افزوده می‌شود. تنها منطق‌های R و K، اصل موضوع دارند و تنها اصل موضوع آنها همان اصل معروف K است:

K $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

قواعد نظام‌ها نیز به قرار زیر است:

قاعده هم‌ارزی ضرورت	قاعده استلزام ضرورت	قاعده ضرورت
$\dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$	$\dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B}$	$\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$

بنابراین، نظام اصل موضوعی این چهار نظام را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

	منطق گزاره‌ها PC	منطق کلاسیک C	منطق یکنواخت M	منطق منتظم R
اصل موضوع	***	***	***	اصل موضوع K
قاعده	***	هم‌ارزی ضرورت	استلزام ضرورت	استلزام ضرورت

	منطق گزاره‌های ضروری PCN	منطق ضروری N	منطق یک‌نواخت ضروری P	منطق نرمال K
اصل موضوع	***	***	***	اصل موضوع K
قواعد	ضرورت	ضرورت هم‌ارزی ضرورت	ضرورت استلزام ضرورت	ضرورت

و یا به طور صریح‌تر:

	منطق گزاره‌ها PC	منطق کلاسیک C	منطق یکنواخت M	منطق منتظم R
اصل موضوع	***	***	***	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
قاعده	***	$\dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$	$\dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B}$	$\dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B}$
	منطق گزاره‌های ضروری PCN	منطق ضروری N	منطق یک‌نواخت ضروری P	منطق نرمال K
اصل موضوع	***	***	***	$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$
قواعد	$\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$	$\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$ $\dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$	$\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$ $\dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B}$	$\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$

منطق‌های C ، M ، R و K ، به ترتیب، از ضعیف‌ترین به قوی‌ترین چیده شده‌اند زیرا می‌توان نشان داد که قاعده ضرورت، در حضور اصل K ، قوی‌تر از استلزام ضرورت و این، به نوبه خود، قوی‌تر از هم‌ارزی ضرورت است:

اثبات قاعده استلزام ضرورت به کمک قاعده ضرورت و اصل K :

1 $\vdash A \to B$ مقدمه

2 $\vdash \Box(A \to B)$ قاعده ضرورت (۱)

3 $\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ اصل K

4 $\vdash \Box A \to \Box B$ وضع مقدم (۲ و ۳)

اثبات قاعده هم‌ارزی ضرورت به کمک قاعده استلزام ضرورت:

1 $\vdash A \leftrightarrow B$ مقدمه

2 $\vdash A \to B$ حذف $\leftrightarrow$ (۱)

3 $\vdash B \to A$ حذف $\leftrightarrow$ (۱)

4 $\vdash \Box A \to \Box B$ قاعده استلزام ضرورت (۲)

5 $\vdash \Box B \to \Box A$ قاعده استلزام ضرورت (۳)

6 $\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$ معرفی $\leftrightarrow$ (۴ و ۵)

با همین برهان‌ها، می‌توان نشان داد که منطق‌های C ، N ، P و K ، نیز، به ترتیب، از ضعیف‌ترین به قوی‌ترین چیده شده‌اند.

تمرین:

۱. نشان دهید که اختلاف منطق‌های C تا K را تنها به کمک اصول موضوعه می‌توان نشان داد. برای این کار، قاعده هم‌ارزی ضرورت را با اصول موضوعه زیر به کار ببرید:

$$\frac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B} \quad \text{قاعده}$$

منطق	اصول موضوعه		منطق	اصول موضوعه
C	***		N	$\Box(A \to A)$
M	$\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$		P	$\Box(A \to A)$ $\quad \Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$
R	$\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$		K	$\Box(A \to A)$ $\quad \Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

۲. نشان دهید که اختلاف منطق‌های C تا K را تنها به کمک اصول موضوعه می‌توان نشان داد:

منطق کلاسیک ضروری N $\quad \dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B} + \dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$	منطق کلاسیک C $\quad \dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$
منطق یکنواخت ضروری P $\quad \dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B} + \dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$	منطق یکنواخت M $\quad \dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B}$
منطق نرمال K $\quad \dfrac{\vdash (A \wedge B) \to C}{\vdash (\Box A \wedge \Box B) \to \Box C} + \dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$	منطق منتظم R $\quad \dfrac{\vdash (A \wedge B) \to C}{\vdash (\Box A \wedge \Box B) \to \Box C}$

۳. نشان دهید که قواعد وجهی M ، R و K را با تک قاعدهٔ RK

$$\frac{\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \to B}{\vdash (\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n) \to \Box B} \quad \text{قاعده RK}$$

می‌توان نشان داد که در آن، داریم:

منطق گزاره‌ها PC	$n \in \{\}$			
منطق گزاره‌های ضروری PCN	$n \in \{0\}$	$n = 0$	$n = 0$	$n = 0$
منطق یکنواخت M	$n \in \{1\}$	$n = 1$	$n = 1$	$n = 1$
منطق یکنواخت ضروری P	$n \in \{0, 1\}$	$n = 0 \vee n = 1$	$n \neq 2$	$n < 2$
منطق منتظم R	$n \in \{2\}$	$n = 2$	$n = 2$	$n = 2$
منطق منتظم R	$n \in \{1, 2\}$	$n = 1 \vee n = 2$	$n \neq 0$	$n > 0$
منطق نرمال K	$n \in \{0, 1, 2\}$	$n = 0 \vee n = 1 \vee n = 2$		
منطق نرمال K	$n \in \{0, \ \ , 2\}$	$n = 0 \vee \quad \vee n = 2$	$n \neq 1$	$n \neq 1$