شبه منطق‌های غیر نرمال

هر منطقی که قواعد و اصول نظام‌های C ، M ، R و K را در بر داشته باشد، به ترتیب، «منطق کلاسیک»، «منطق یکنواخت»، «منطق منتظم» و «منطق نرمال» نامیده می‌شود اما منطقی که به جای قواعد و اصول، شامل همه قضایای C ، M ، R و K باشد، به ترتیب، «منطق شبه‌کلاسیک»، «منطق شبه‌یکنواخت»، «منطق شبه‌منتظم» و «منطق شبه‌نرمال» نامیده می‌شود.

منطق وجهی		شبه منطق	
کلاسیک	دارای قاعده هم‌ارزی ضرورت	شبه کلاسیک	شامل همه قضایای C
یکنواخت	دارای قاعده استلزام ضرورت	شبه یکنواخت	شامل همه قضایای C
منتظم	دارای قاعده استلزام ضرورت و اصل موضوع K	شبه منتظم	شامل همه قضایای C
نرمال	دارای قاعده ضرورت و اصل موضوع K	شبه نرمال	شامل همه قضایای C

از آنجا که داشتن قواعد و اصول به مثابه داشتن همه قضایا است، همه منطق‌های کلاسیک، شبه کلاسیک هستند نه برعکس؛ همه منطق‌های یکنواخت، شبه یکنواختند نه برعکس و ... . منطق‌های شبه کلاسیکِ غیر کلاسیک، نمونه‌های فراوان دارند که به یکی از آنها اشاره می‌شود: مجموعه همه قضایای C را در نظر بگیرید. می‌دانیم که هیچ کدام از این فرمول‌ها در ابتدای خود نماد ضرورت را ندارند. برای نمونه، $\Box(A \rightarrow A)$ عضو این مجموعه نیست. حال، همه نتایجِ $\Box(A \rightarrow A)$ در منطق کلاسیک C را در نظر بگیرید و آن را C^* بنامید:

$$C^* = \{B \mid \Box(A \rightarrow A) \vdash_C B\}$$

و یا $$C^* = \{B \mid \vdash_C \Box(A \rightarrow A) \rightarrow B\}$$

واضح است که همه قضایای C عضو C^* هستند زیرا اگر B قضیه C باشد از هر فرمولی نتیجه می‌شود. همچنین، $\Box(A \rightarrow A)$ عضو C^* است زیرا از خودش نتیجه می‌شود. در پایان، ضرورت همه قضایای C عضو C^* است زیرا اگر B قضیه C باشد آنگاه

1 $\vdash_C B$ مقدمه

2 $\vdash_C (A \rightarrow A) \leftrightarrow B$ منطق گزاره‌ها (۱)

3 $\vdash_C \Box(A \rightarrow A) \leftrightarrow \Box B$ قاعده هم‌ارزی ضروری (۲)

4 $\vdash_C \Box(A \rightarrow A) \rightarrow \Box B$ حذف $\leftrightarrow$ (۳)

5 $\Box B \in C^*$ تعریفC^*

بنابراین، در C^* ، هر فرمول حداکثر یک $\Box$ در آغاز خود دارد نه بیشتر؛ برای نمونه، $A \rightarrow A$ و $\Box(A \rightarrow A)$ عضو C^* هستند اما $\Box\Box(A \rightarrow A)$ عضو این مجموعه نیست زیرا از $\Box(A \rightarrow A)$ نتیجه نمی‌شود.

اگر «منطق» را به مجموعه‌ای از فرمول‌ها تعریف کنیم که نسبت به وضع مقدم و جانشینی بسته باشد یعنی

$$A \in S,\ (A \rightarrow B) \in S \Rightarrow B \in S$$
$$A \in S \Rightarrow A\,(B/p) \in S$$

آنگاه C^* منطق است. مجموعه C^* یک شبه منطق کلاسیک است زیرا شامل همه قضایای C است اما منطق کلاسیک نیست زیرا شامل $\Box (A \rightarrow A) \leftrightarrow (A \rightarrow A)$ است اما شامل $\Box\Box (A \rightarrow A) \leftrightarrow \Box (A \rightarrow A)$ نیست و این نشان می‌دهد که قاعده هم‌ارزی ضرورت در این مجموعه نقض می‌شود و بنابراین، C^* منطق کلاسیک نیست. در این منطق، اصل موضوع $\Box A \rightarrow \Box\Box A$ صادق نیست (چرا؟) اگر این اصل موضوع را به C^* بیفزاییم چگونه نظامی حاصل می‌شود؟