سمانتیک منطق‌های لویس و منطق‌های غیرنرمال

کریپکی، در سال‌های ۱۹۵۹ و ۱۹۶۳، به ترتیب، برای نظام‌های نرمال S5 و S4 از نظام‌های لویس و نظام نرمال T از نظام‌های فیز، سمانتیک مناسبی را طراحی کرد و با افزودن جهان‌های غیرنرمال به سمانتیک S4 و T، در سال ۱۹۶۵، موفق شد برای نظام‌های S3 و S2 از نظام‌های لویس سمانتیک غیرنرمال فراهم سازد. نظام S1، اما، به این سمانتیک تن در نمی‌داد زیرا سمانتیک S2 و S3 هرچند دارای جهان‌های غیرنرمال بود اما این جهان‌ها، منتظم و قاعده‌مند (regular) بودند در حالی که سمانتیک نظام S1 نیازمند جهان‌های غیرنرمالِ غیرمنتظم و بی‌قاعده بود. کشف این جهان‌های غیرمنتظم نیازمند کشف نوعی دیگر از نظام‌های وجهی، نوعی دیگر از سمانتیک و نوعی دیگر از جهان‌ها بود. این نظام‌های وجهی جدید نظام‌های وجهی کلاسیک بودند که سمانتیک آنها نیز کاملا جدید بود و به سمانتیک همسایگی شهرت یافت و در این سمانتیک، امکان ساختن جهان‌های غیرنرمال و غیرمنتظم برای اولین بار فراهم آمد. این سمانتیک در سال‌های پایانی دهه ۱۹۶۰ طراحی شد و مکس کرسوِل، برای اولین بار در سال ۱۹۷۲، توانست سمانتیک مناسبی را برای نظام S1 به کمک سمانتیک همسایگی پایه‌گذاری کند. این سمانتیک را چلس و سگربرگ ۱۹۹۶ پیراستند و تعمیم دادند. در اینجا، با استفاده از مقاله چلس و سگربرگ، سمانتیک نظام S1 را معرفی خواهیم نمود. برخی از شگردهای اساسی کریپکی و کرسوِل در سمانتیک منطق ربط به کار رفته است و آشنایی با آنها به فهم این سمانتیک کمک بسیاری می‌کند.

در سمانتیک منطق کلاسیک، هر سطر جدول ارزش یک مدل متناهی است که به تعدادی متناهی (یک یا چند) متغیر جمله‌ای، یکی از دو ارزش صفر و یک را نسبت می‌دهد. اگر جدول ارزش می‌توانست نامتناهی باشد و به همه متغیرها، ارزش‌دهی کند هر سطر آن، یک مدل می‌بود. مدل که آن را «الگو»، «تعبیر»، «ارزش‌دهی» و «جهان ممکن» نیز می‌نامند، با این توضیح، برابر است با یک سطر از یک جدول ارزش نامتناهی. مدل، تابعی است که به هر متغیر جمله‌ای از زبان، یکی از دو ارزش صدق و کذب (یا صفر و یک) را نسبت می‌دهد. بنا به قواعد ارزش‌دهیِ ادات‌های تابع ارزشی (= شرایط صدق و کذب فرمول‌های دارای آن ادات‌ها)، در هر مدل، هر فرمول، یکی از دو ارزش صفر و یک را به خود می‌گیرد.

سمانتیک S5

سمانتیک S5 مهم‌ترین پیشرفتی که به وجود می‌آورد تفکیک مفهوم مدل از مفهوم جهان ممکن و سطری از جدول ارزش نامتناهی است. در این سمانتیک، برای تعیین فرمول‌های ضروری و ممکن، باید به دیگر جهان‌های ممکن و دیگر سطرهای جدول ارزش نیز نظر کرد. در یک مدل، ارزش $\Box A$ را صرفا از ارزش A در آن مدل نمی‌توان به دست آورد بلکه ارزش A در همه مدل‌های دیگر نیز باید بررسی شود. اینجا ناچاریم مفهوم جهان ممکن و سطر جدول ارزش را از مدل تغییر دهیم. بر این اساس، در سمانتیک S5، یک مدل به مجموعه‌ای از جهان‌های ممکن و یا مجموعه‌ای از سطرهای جدول ارزش تعریف می‌شود. از اینجا می‌توان دریافت که مدل وجهی برابر است با مجموعه‌ای از مدل‌های کلاسیک.

سمانتیک S4 و T

سمانتیک S4 پیشرفت دیگری را رقم زد و آن مفهوم دسترسی میان جهان‌ها و تفکیک مدل از ساختار مدل (model structure یا Structure) و پایهٔ مدل (Frame) بود. در این سمانتیک، برخلاف سمانتیک S5، صدق $\Box A$ در

یک جهان معادل صدق A در همه جهان‌ها نیست بلکه معادل صدق A در جهان‌هایی است که نسبت به جهان مورد نظر ممکن هستند و یا در اصطلاحی دیگر، جهان‌هایی که در دسترس جهان مورد نظر هستند. اما این دسترسی چه شرایطی دارد؟ در سمانتیک S4، این رابطه دسترسی از نوع انعکاسی و متعدی است. در سمانتیک نظام‌های دیگر، نوع دیگری از رابطه دسترسی برقرار است. از اینجا به مفهوم جدید ساختار یا پایهٔ یک مدل می‌رسیم: تعداد و نوع رابطه دسترسی در یک مدل، جدا از ارزش‌های اختصاص یافته به متغیرها، «ساختار» آن مدل نامیده می‌شود. اکنون، مفهوم ساختار است که می‌تواند میان نظام‌های گوناگون منطق وجهی، تمایز برقرار سازد و مفهوم مدل نقش اولی در این زمینه ندارد. در سمانتیک S4، ساختار مدل‌ها باید انعکاسی و متعدی باشد اما در سمانتیک نظام T، انعکاسی بودن کفایت می‌کند.

سمانتیک S3 و S2

پیشرفت سوم مربوط به سمانتیک نظام‌های استلزام اکیدی S3 و S2 می‌شود. در این سمانتیک، برخی جهان‌های غیر نرمال به سمانتیک نظام‌های S4 و T افزوده می‌شود. در جهان‌های غیرنرمال، چنان که گفتیم، همه فرمول‌ها، از جمله تناقض، ممکن است. (توجه به این نکته اساسی است که در جهان‌های غیر نرمال، تناقض رخ نمی‌دهد و صادق نیست و هیچ گزاره‌ای به همراه نقیضش در این جهان‌ها، صادق نیستند؛ در این جهان‌ها، تناقض فقط ممکن است.)

اما مگر امکان تناقض پذیرفتنی است؟ تناقض محال و ممتنع است و نمی‌تواند ممکن باشد. کریپکی چگونه توانسته است چیزی به این پوچی و مهملی را به اندیشه آورد؟ برای کاستن از شگفتی این مسئله کافی است به جهان‌های ممکن نرمال (همان جهان‌های ممکن قبلی خودمان) نظر بیفکنیم. دسترسی در سمانتیک S4، متعدی و انعکاسی بود. برداشتن این دو شرط به نظام بسیار ضعیف K می‌انجامد. در سمانتیک K، برخی جهان‌های ممکن بن‌بست هستند و به هیچ جهانی دسترسی ندارند. نظام نرمال دیگری به نام Ver هست که در سمانتیک آن، همه جهان‌ها بن‌بست هستند. در جهان‌های بن‌بست، همه گزاره‌ها، از جمله تناقض، ضروری هستند. بی‌شک، ضروری دانستن تناقض اگر پوچ‌تر و بی‌محتواتر از امکان تناقض نباشد از آن کمتر نیست (توجه کنید که غالبا، ضروری بسیار قوی‌تر از ممکن تلقی می‌شود.) از اینجا دانسته می‌شود که شگفتی و غرابت جهان‌های نرمال بن‌بست کمتر از جهان‌های غیرنرمال نیست.

نگاهی به سمانتیک منطق تکلیف D، شگفتی یاد شده را به کمترین حد خود می‌رساند. جهان‌ها، در این سمانتیک، می‌توانند غیرانعکاسی و صرفا تسلسلی باشند. در جهان‌های غیرانعکاسی، صدق را نمی‌توان از ضرورت نتیجه گرفت و برخی از گزاره‌های کاذب، ضرورتا صادق هستند! در جهانی که گزاره کاذب می‌تواند ضروری باشد احتمالا، تناقض باید، دست کم، ممکن باشد! به علاوه، برای □ و ◊ در سمانتیک D، مفاهیمی از زبان طبیعی غیر از ضرورت و امکان یافته‌اند که بسیار بدیهی می‌رسند. اگر این دو نماد را به وجوب و جواز اخلاقی تعبیر کنیم واضح است که جهان‌های بسیاری را می‌توان تصور کرد که در آن یک گزاره وجوب اخلاقی دارد اما انسان‌ها بدان عمل نمی‌کنند و آن را به مرحله صدق نمی‌رسانند. در این جهان‌ها، وجوب بدون صدق و صدق بدون جواز معنی می‌یابد. برای سمانتیک‌های نرمال بن‌بست و سمانتیک‌های غیرنرمال نیز می‌توان چنین تعبیرهایی را فراهم آورد و □ و ◊ را در معانی دیگری به کار برد که جای هیچ شگفتی باقی نماند. برای نمونه، می‌توان □A را به $(A \vee {\sim}A)$

تعریف و تعبیر کرد و به نظام Ver رسید و یا همین کار را با امکان انجام داد (یعنی $\Diamond A$ را به $(A \vee \sim A)$ تعریف و تعبیر کرد) و به یک نظام غیرنرمال اما سازگار رسید که مانند Ver، به منطق کلاسیک غیروجهی فرومی‌کاهد.

از شگفتی فلسفی امکانِ تناقض که بگذریم، این نکته باقی می‌ماند که به لحاظ صوری و ریاضی، سمانتیک S3 و S2 چه ویژگی‌هایی دارند، چگونه ساخته می‌شوند و در جهان‌های غیرنرمال، چگونه می‌توان تناقض را ممکن ساخت؟ شگردهای کریپکی برای پاسخ به این مسائل را در سه مرحله شرح می‌دهیم:

۱. جهان‌ها غیر نرمال را به این روش می‌سازیم که قاعده ارزش‌دهی $\Box$ و $\Diamond$ را، در آنها، تغییر می‌دهیم: برخلاف Ver، $\Diamond A$ را به $(A \vee \sim A)$ و $\Box A$ را به $(A \wedge \sim A)$ تعریف می‌کنیم (و یا به طور ساده، همه فرمول‌های با $\Box$ آغازین را کاذب و همه فرمول‌های با $\Diamond$ آغازین را صادق ارزش‌دهی می‌کنیم.)

۲. در سمانتیک S4 و T، به هر مدل مجموعه‌ای از این جهان‌های غیرنرمال را می‌افزاییم و رابطه دسترسی را بدون تغییر درون جهان‌های نرمال، به گونه‌ای گسترش می‌دهیم که هر جهان غیرنرمال در دسترس دست کم یک جهان نرمال قرار بگیرد. (در اینجا لازم نیست جهان‌های غیر نرمال به جهانی دسترسی داشته باشند. (چرا؟) همچنین، توجه کنید که تعداد جهان‌های غیر نرمال نامتناهی است و بنابراین بی‌نهایت مجموعه از این جهان‌ها در اختیار هست. بنابراین از هر مدل نرمال، بی‌نهایت مدل غیرنرمال ساخته می‌شود.)

۳. شگرد سوم مربوط می‌شود به نحوه تعریف اعتبار. اعتبار فرمول در یک مدل از سمانتیک منطق‌های نرمال برابر بود با صدق در همه جهان‌های آن. در سمانتیک غیرنرمال، دو گزینه برای تعریف اعتبار داریم: اول اینکه (مانند سمانتیک نرمال،) اعتبار فرمول در یک مدل را به صدق در همه جهان‌های آن تعریف کنیم؛ گزینه دوم این است که (مجددا، مانند سمانتیک نرمال،) اعتبار فرمول در یک مدل را به صدق در همه جهان‌های نرمال آن تعریف کنیم. آشکار است که هر دو تعریف اعتبار در سمانتیک غیرنرمال، به گونه‌ای تعمیم تعریف آن در سمانتیک نرمال است. تعریف نخست به ذهن نزدیک‌تر است و انتقال به تعریف دوم نیاز به خلاقیت بیشتری دارد امری که کریپکی بیست و پنج ساله از آن بهرۀ بسیار برده بود. کریپکی به کمک تعریف دوم توانست سمانتیک مناسبی برای S3 و S2 پی بریزد.

می‌دانیم که از نظر برهانی،در S3 و S2، هیچ قضیه‌ای دو $\Box$ آغازین ندارد و گزاره‌های ضروری و استلزام اکید در آن ضروری نیستند و با افزودن ضرورت آن گزاره‌ها، به نظام‌های S4 و T می‌رسیم:

$S2 + \Box (A \prec A) = T$ $\qquad$ $S2 + \Box\Box (A \supset A) = T$

$S3 + \Box (A \prec A) = S4$ $\qquad$ $S3 + \Box\Box (A \supset A) = S4$

اکنون به شرایط سمانتیکی این نظام‌ها توجه کنید:

منطق	شرایط رابطه دسترسی	نوع جهان‌ها	تعریف اعتبار	حداکثر تعداد $\Box$ آغازین در ضایا
S2	انعکاسی	نرمال و غیرنرمال	صدق در همه جهان‌های نرمال	۱
S3	انعکاسی و متعدی	نرمال و غیرنرمال	صدق در همه جهان‌های نرمال	۱
T	انعکاسی	نرمال	صدق در همه جهان‌ها (ی نرمال)	بی‌نهایت
S4	انعکاسی و متعدی	نرمال	صدق در همه جهان‌ها (ی نرمال)	بی‌نهایت
S5	انعکاسی و متعدی و متقارن	نرمال	صدق در همه جهان‌ها (ی نرمال)	بی‌نهایت

اگر جهان‌های غیرنرمال را نیز در تعریف اعتبار سهیم بدانیم دیگر هیچ قضیه‌ای ضروری نخواهد بود زیرا در جهان‌های غیرنرمال همه گزاره‌های ضروری کاذب هستند. از اینجا، می‌توان به سمانتیک نظام‌های غیرنرمال ولی منتظمی که لمون در سال ۱۹۵۷ طراحی کرده است رسید. این نظام‌ها، چنان که قبلا نیز گفتیم E2، E3، E4 و E5 نام دارند و با حذف قضیه‌های استلزام اکید (= دارای $\Box$ آغازین) از نظام‌های S2، S3، S4 و S5 به دست می‌آیند:

$E2\ [\Box\ (A \supset A)] = S2$
$E3\ [\Box\ (A \supset A)] = S3$
$ET\ [\Box\ (A \supset A)] = T$
$E4\ [\Box\ (A \supset A)] = S4$
$E5\ [\Box\ (A \supset A)] = S5$

$E2\ [A \prec A] = S2$
$E3\ [A \prec A] = S3$
$ET\ [A \prec A] = T$
$E4\ [A \prec A] = S4$
$E5\ [A \prec A] = S5$

اگر در سمانتیک E2 و E3، شرط کنیم که جهان‌های نرمال به جهان‌های غیرنرمال دسترسی نداشته باشند به سمانتیک مناسب با نظام‌های ET و E4 می‌رسیم. نظریه برهان ET و E4 از افزودن اصل موضوع

$$\Box\ (A \supset A) \supset \Box\Box\ (A \supset A)$$

یا اصل موضوع

$$(A \prec A) \supset \Box\ (A \prec A)$$

به نظام‌های E2 و E3 نیز قابل حصول است:

$ET = E2 + \Box\ (A \supset A) \supset \Box\Box\ (A \supset A)$
$E4 = E3 + \Box\ (A \supset A) \supset \Box\Box\ (A \supset A)$

$ET = E2 + (A \prec A) \supset \Box\ (A \prec A)$
$E4 = E3 + (A \prec A) \supset \Box\ (A \prec A)$

منطق	شرایط رابطه دسترسی	نوع جهان‌ها	تعریف اعتبار	دسترسی جهان نرمال به جهان غیرنرمال	حداکثر تعداد $\Box$ آغازین در قضایا
E2	انعکاسی	نرمال و غیرنرمال	صدق در همه جهان‌ها	جایز	۰
E3	انعکاسی و متعدی	نرمال و غیرنرمال	صدق در همه جهان‌ها	جایز	۰
ET	انعکاسی	نرمال و غیرنرمال	صدق در همه جهان‌ها	ممنوع	۰
E4	انعکاسی و متعدی	نرمال و غیرنرمال	صدق در همه جهان‌ها	ممنوع	۰
E5	انعکاسی و متعدی و متقارن	نرمال و غیرنرمال	صدق در همه جهان‌ها	ممنوع	۰

افزودن $(A \prec A)$ یا $\Box\ (A \supset A)$ به ET، E4 و E5، نظام‌های T، S4 و S5 را به دست می‌دهد که سمانتیک آنها فاقد جهان‌های غیرنرمال است:

$T = ET + \Box\ (A \supset A)$
$S4 = E4 + \Box\ (A \supset A)$
$S5 = E5 + \Box\ (A \supset A)$

$T = ET + (A \prec A)$
$S4 = E4 + (A \prec A)$
$S5 = E5 + (A \prec A)$

سمانتیک S1

در سمانتیک S1، فرمول‌هایی مانند $\Box (A \wedge B) \prec \Box A$ و $\Box (\Box (A \wedge B) \supset \Box A)$ قضیه نیستند و افزودن هر یک از آنها به S1 نظام S2 را نتیجه می‌دهد:

$$S1 + \Box (A \wedge B) \prec \Box A = S2 \qquad S1 + \Box (\Box (A \wedge B) \supset \Box A) = S2$$

بنابراین، در سمانتیک S1، این فرمول باید در بعضی جهان‌ها، مانند x، کاذب باشد. در این صورت، $\Box (A \wedge B) \supset \Box A$ در جهانی مانند y که در دسترس x است، کاذب خواهد بود.

چنین جهانی نمی‌تواند نرمال باشد زیرا در جهان y، $\Box (A \wedge B)$ صادق و $\Box A$ کاذب است. حال اگر y نرمال باشد به جهانی مانند z دسترسی خواهد داشت که در آن، $A \wedge B$ صادق و A کاذب است و این ممکن نیست. بنابراین، در سمانتیک S1، نیازمند جهان‌های غیرنرمال هستیم.

در این جهان‌های غیرنرمال، نمی‌توانیم، به مانند جهان‌های S3 و S2، ضرورت همه فرمول‌ها را کاذب بگیریم زیرا در این صورت، $\Box (A \wedge B) \supset \Box A$ صادق خواهد شد چون مقدم و تالی‌اش کاذب شده‌اند.

در جهان‌های غیرنرمال S1، ناچاریم ضرورت فرمول‌ها (یعنی فرمول‌های به شکل $\Box A$) را به دلخواه (!) ارزش‌دهی کنیم. البته این ارزش‌دهی نمی‌تواند کاملا به دلخواه باشد زیرا در S1، قواعد و اصول زیر را داریم:

۳	۲	۱
$[(A \prec B) \wedge (B \prec C)] \prec (A \prec C)$	$\Box A \prec A$	$\dfrac{\vdash A = B}{\vdash \Box A = \Box B}$

و بنابراین، ناچاریم شرایط زیر را در جهان غیرنرمال خود رعایت کنیم:

		۳	۲	۱
$\dfrac{A \prec B \quad B \prec C}{A \prec C}$	و یا	$[(A \prec B) \wedge (B \prec C)] \supset (A \prec C)$	$\Box A \supset A$	$\dfrac{\vDash A \equiv B}{\vDash \Box A \equiv \Box B}$

این شرایط را به صورت زیر، می‌توانیم بنویسیم:

۱. ضرورتِ فرمول‌های هم‌ارزش، باید هم‌ارزش باشد؛
۲. اگر ضرورت یک فرمول، صادق بود آنگاه آن فرمول باید صادق باشد (به عبارت ساده‌تر: فرمول‌های کاذب، ضرورتشان نیز باید کاذب باشد)؛
۳. اگر دو استلزام اکید با حد وسط مشترک، صادق بودند باید نتیجه آنها نیز به صورت استلزام اکید صادق باشد.

اینجا سوالی مطرح می‌شود: آیا ارزش‌دهی دلخواه با رعایت شرایط بالا ممکن است؟ و اگر ممکن است چگونه؟ پاسخ در سمانتیک همسایگی نهفته است. برای جهان‌های غیرنرمال، می‌توان یک رابطه دسترسی جدید معرفی نمود که بر اساس آن، یک جهان به مجموعه‌هایی از جهان‌ها دسترسی دارد (نه فقط به یک مجموعه از جهان‌ها). اگر این رابطه را با S نشان دهیم آنگاه دسترسی جهان w به مجموعهٔ جهان‌های X را می‌توان به صورت wSX یا $X \in S(w)$ نشان می‌دهند. در سمانتیک همسایگی، شرط صدق □ به یکی از دو صورت معادل زیر بیان می‌شود:

$V(\Box A, w) = 1$ اتا $V(A) \in S(w)$ اتا $wSV(A)$

$\vDash_w \Box A$ اتا $|A| \in S(w)$ اتا $wS|A|$

در این دو عبارت، $V(A)$ و $|A|$ دو نحوه بیان مجموعه صدق فرمول A هستند. مجموعه صدق یک فرمول، مجموعه جهان‌هایی است که آن فرمول در آن صادق است.

اکنون، پاسخ سوالی که مطرح شد: شرط اول (یعنی قاعده ضرورت هم‌ارزی) در این سمانتیک معتبر است:

1 $\vDash A \equiv B$
2 $|A| = |B|$
3 $[\,|A| \in S(w)\,] \equiv [\,|B| \in S(w)\,]$
4 $\vDash_w \Box A \equiv \vDash_w \Box B$
5 $\forall w\, [\vDash_w \Box A \equiv \vDash_w \Box B]$
6 $\vDash \Box A \equiv \Box B$

برای شرط دوم (یعنی اصل T، $\Box A \supset A$) باید داشته باشیم:

1 $\vDash_w \Box A \supset A$
2 $\vDash_w \Box A \supset \vDash_w A$
3 $[\,|A| \in S(w)\,] \supset [\,w \in |A|\,]$
4 $\forall A\, \{[\,|A| \in S(w)\,] \supset [\,w \in |A|\,]$
5 $\forall X\, \{[\,X \in S(w)\,] \supset [\,w \in X\,]\}$

سطر ۵ از اینجا به دست آمده است که A هر فرمولی می‌تواند باشد و بنابراین، $|A|$ هر مجموعه‌ای می‌تواند باشد پس سطر ۴ را در سطر ۵ با مجموعه X بازنویسی کردیم. سطر ۵ را شرط «انعکاس غیرنرمال» می‌نامند. وجود این شرط در جهان‌های غیرنرمال به همراه انعکاسی بودن رابطه دسترسی در جهان‌های نرمال، معادل اعتبار اصل T در کل مدل است.

برای شرط سوم (یعنی اصل X)

$$
\overset{1}{\begin{array}{c} A \prec B \\ B \prec C \\ \hline A \prec C \end{array}}
\Rightarrow
\overset{2}{\begin{array}{c} \Box\,(A \supset B) \\ \Box\,(B \supset C) \\ \hline \Box\,(A \supset C) \end{array}}
\Rightarrow
\overset{3}{\begin{array}{c} wS\,|A \supset B| \\ wS\,|B \supset C| \\ \hline wS\,|A \supset C| \end{array}}
\Rightarrow
\overset{4}{\begin{array}{c} wS\,|{\sim}A \vee B| \\ wS\,|{\sim}B \vee C| \\ \hline wS\,|{\sim}A \vee C| \end{array}}
$$

$$
\Rightarrow
\overset{5}{\begin{array}{c} wS\,(|{\sim}A| \cup |B|) \\ wS\,(|{\sim}B| \cup |C|) \\ \hline wS\,(|{\sim}A| \cup |C|) \end{array}}
\Rightarrow
\overset{6}{\begin{array}{c} wS\,(|A|' \cup |B|) \\ wS\,(|B|' \cup |C|) \\ \hline wS\,(|A|' \cup |C|) \end{array}}
\Rightarrow
\overset{7}{\begin{array}{c} wS\,(X' \cup Y) \\ wS\,(Y' \cup Z) \\ \hline wS\,(X' \cup Z) \end{array}}
$$

شرط هفتم معادل شرط سمانتیکی برای اصل X است. برای اینکه یادآوری این شرط آسان‌تر شود، می‌توان در نظریه مجموعه‌ها، $X' \cup Y$ را به صورت ساده‌تر $X \supset Y$ تعریف کرد. در این صورت، شرط هفتم به صورت ساده‌تر زیر در می‌آید:

$$
\begin{array}{c} wS\,(X \supset Y) \\ wS\,(Y \supset Z) \\ \hline wS\,(X \supset Z) \end{array}
\qquad \text{و یا} \qquad
\begin{array}{c} (X \supset Y) \in S\,(w) \\ (Y \supset Z) \in S\,(w) \\ \hline (X \supset Z) \in S\,(w) \end{array}
$$

این شرط، هرچند بسیار شبیه اصل X است اما غیر از آن است. در اینجا $X \supset Y$ یک مجموعه است اما در آنجا، $\Box\,(A \supset B)$ یک فرمول بود و این تفاوت، مهم‌ترین نکته در سمانتیک همسایگی است که بی‌توجهی به آن به عدم درک عمق و اهمیت این سمانتیک منتهی می‌شود.

اکنون، ابزارهای مورد نیاز برای سمانتیک S1 فراهم آمده است:

برای سمانتیک S1، کافی است به سمانتیک منطق نرمال T، مجموعه‌ای از جهان‌های غیرنرمال را افزوده، آنها را در دسترس همه یا بعضی از جهان‌های نرمال قرار دهیم. از سوی دیگر، میان جهان‌های غیرنرمال، رابطه دسترسی همسایگی S را با شرایط زیر برقرار می‌سازیم:

شرایط رابطه همسایگی:

$$
\begin{array}{c} wS\,(X \supset Y) \\ wS\,(Y \supset Z) \\ \hline wS\,(X \supset Z) \end{array}
\qquad \text{و} \qquad
\begin{array}{c} X \in S\,(w) \\ \hline w \in X \end{array}
$$

شرایط صدق در جهان‌های غیرنرمال:

$\vDash_w \Box A$	اتا	$\vert A\vert \in S\,(w)$	اتا	$wS\vert A\vert$
$\vDash_w \Diamond A$	اتا	$\vert A\vert' \notin S\,(w)$	اتا	$\sim wS\vert A\vert'$

چنان که می‌بینیم، در سمانتیک همسایگی، شرایط صدق □ و ◊ سورهای کلی و جزیی را به کار نمی‌برد و این یکی از نکات مهم در تفاوت این سمانتیک با سمانتیک‌های رابطه‌ای (relational) منطق موجهات است.

و در پایان، اعتبار را به صدق، نه در همه جهان‌ها، بلکه در جهان‌های نرمال تعریف می‌کنیم:

تعریف اعتبار: یک فرمول، در یک مدل، معتبر است اتا در همه جهان‌های نرمال آن معتبر باشد.

اثبات سازگاری، تمامیت و تصمیم پذیری برای نظام‌های S1، S2 و S3 را در منابع زیر می‌توانید ببینید:

Kripke, Saul A., "The semantical analysis of modal logic ii. Nonnormal modal propositionalcalculi," pp. 206–220 in *The Theory of Models: Proceedings of the 1963 InternationalSymposium at Berkeley*, edited by J. Addison, L. Henkin, and A. Tarski, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1965.

Cresswell, M. J., "The completeness of S1 and some related problems," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 13 (1972), pp. 485–496.

Chellas, Brian F. and Krister Segerberg, "Modal Logics in the Vicinity of S1", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Volume 37, Number 1, Winter 1996, pp. 1-24.

منابع زیر، در پایان مقاله اخیر، فهرست شده‌اند که به دلیل مهم بودن آنها در این بحث، همگی را آورده‌ایم:

[1] Benton, Roy A., "Strong modal completeness with respect to neighborhood semantics," unpublished manuscript, Department of Philosophy, The University of Michigan, 1975.

[2] Chellas, Brian F., *Modal Logic: An Introduction*, Cambridge University Press, Cambridgeand New York, 1980; reprinted with corrections 1988.

[3] Cresswell, M. J., "The interpretation of some Lewis systems of modal logic," *AustralasianJournal of Philosophy*, vol. 45 (1967), pp. 198–206.

[4] Cresswell, M. J., "The completeness of S1 and some related problems," *Notre DameJournal of Formal Logic*, vol. 13 (1972), pp. 485–496.

[5] Cresswell, M. J., "S1 is not so simple," pp. 29–40 in *Modality, Morality and Belief:Essays in Honor of Ruth Barcan Marcus*, edited by Walter Sinnott-Armstrong, Diana Raffman, and Nicholas Asher, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[6] Feys, Robert, *Modal Logics*, edited with some complements by Joseph Dopp,E. Nauwelaerts, Louvain, and Gauthiers-Villars, Paris, 1965.

[7] Girle, Roderick A., "S1= S0.9," *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 16 (1975),pp. 339–344.

[8] Hughes, G. E., and M. J. Cresswell, *An Introduction to Modal Logic*, Methuen and Co. Ltd., London, 1968; reprinted with corrections 1972.

[9] Hughes, G. E., and M. J. Cresswell, *A Companion to Modal Logic*, Methuen and Co. Ltd., London and New York, 1984.

[10] Kripke, Saul A., "The semantical analysis of modal logic ii. Nonnormal modal propositionalcalculi," pp. 206–220 in *The Theory of Models: Proceedings of the 1963 International Symposium at Berkeley*, edited by J. Addison, L. Henkin, and A. Tarski, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1965.

[11] Lemmon, E. J., "New foundations for Lewis modal systems," *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 22 (1957), pp. 176–186.

[12] Lemmon, E. J., in collaboration with Dana Scott, *The "Lemmon Notes": An Introduction to Modal Logic*, edited by Krister Segerberg, no. 11 in the American Philosophical Quarterly Monograph Series, edited by Nicholas Rescher, Basil Blackwell, Oxford,1977.

[13] Lewis, C. I., *A Survey of Symbolic Logic*, University of California Press, Berkeley, 1918.

[14] Lewis, C. I., and C. H. Langford, *Symbolic Logic*, New York, 1932; second edition, Dover Publications, 1959.

[15] Lewis, David K., "Intensional logics without iterative axioms," *Journal of Philosophical Logic*, vol. 3 (1974), pp. 457–466.

[16] McKinsey, J. C. C., “A reduction in number of the postulates for C. I. Lewis’ system of strict implication,” *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 40 (1934),pp. 425–427.

[17] Schotch, Peter K., “Remarks on the semantics of non-normal logics,” *Topoi*, vol. 3(1984), pp. 85–90.

[18] Segerberg, Krister, *An Essay in Classical Modal Logic*, The Philosophical Society, Uppsala,1971.

[19] Shukla, Anjan , “Decision procedures for Lewis system S1 and related modal systems,” *Notre Dame Journal of Formal Logic*, vol. 11 (1970), pp. 141–180.

[20] Surendonk, Timothy J., “Canonicity for intensional logics without iterative axioms,” Technical Report TR-ARP-4-95, Automated Reasoning Project (Research School of Information Sciences and Engineering, and Centre for Information Science Research),Australian National University, November 27, 1995.

[21] Sylvan, Richard, “Relational semantics for all Lewis, Lemmon and Feys modal logics, most notably for systems between S0.3◦ and S1,” *The Journal of Non-classical Logic*, vol. 6 (1989), pp. 19–40.