منطق شهودی

تاریخچه

ال. ای. جی. براور، ریاضی دان و فیلسوف هلندی، در آغاز قرن بیستم یکی از سه فلسفه ریاضیِ آن روزگار را پایه گذاشت و رویکرد جدیدی به ریاضیات پایه گذاری کرد که تا کنون یکی از مهم‌ترین شاخه‌های فلسفه ریاضی به شمار می‌آید. ریاضیات براور «ریاضیات شهودی» و فلسفه ریاضی‌اش «شهودیی» نامیده می‌شود. (دو فلسفه ریاضی دیگر، منطق‌گرایی فرگه و راسل و صورت‌گرایی هیلبرت بود.) چنان که خواهیم گفت، براور اصل طرد شق ثالث را که اصلی منطقی محسوب می‌شود، در ریاضیات، نادرست می‌شمرد و بسیاری از استدلال‌های ریاضی‌دان‌ها را نمی‌پذیرفت. براور، با اینکه ریاضیات شهودی را پرورانده بود، منطقی مناسب آن ارائه نداد و این نوعی ضعف برای آن به شمار می‌آمد. انجمن ریاضی هلند (Dutch Mathematics Socity) در سال ۱۹۲۸، در مسابقه علمی خود، جایزه‌ای برای صورت‌بندی منطقیِ ریاضیات شهودی تعیین کرد. آرند هیتنیگ، ریاضی– منطق‌دان هلندی و شاگرد براور که در سال ۱۹۲۵ به راهنمایی او دکتری گرفته بود، با صورت‌بندی اولین نظام منطق شهودی، در همان سال جایزه را کسب کرد. این منطق نام‌های اختصاری گوناگونی، مانند H، I و J ، دارد که از Heyting، Intuitionistic و Jntuitionistik برگرفته شده‌اند. به همین دلیل، براور و هیتینگ را، به ترتیب، واضع ریاضیات و منطق شهودی می‌دانند.

هیتینگ، در سال ۱۹۳۰، در سه مقاله که صورت‌بندی خود از اصول موضوعه منطق شهودی را منتشر کرد، از چند جدول چندارزشی برای اثبات تعریف‌ناپذیری ادات‌ها با یکدیگر استفاده کرد. گودل ۱۹۳۲ نشان داد که هیچ جدول ارزش متناهی وجود ندارد که منطق شهودی، نسبت به آن، سازگار و تمام باشد. استانیسلاو یاکوفسکی ۱۶۳۶ جدول ارزشی نامتناهی ارائه کرد که منطق شهودی، نسبت به آن، سازگار و تمام بود. از آنجا که کار کردن با جدول‌های نامتناهی دشوار است، منطق‌دان‌ها به دنبال سمانتیکی از نوع دیگر بودند. تارسکی و استون ۱۹۳۷ شباهت‌هایی میان منطق شهودی و عملگر بستار (closure) در توپولوژی یافتند و بر اساس آن، اولین تعبیر برای منطق شهودی را به دست دادند. این تعبیر بعدها «سمانتیک توپولوژیک» نام گرفت. یاکوفسکی و ریگر و دیگران سمانتیک‌های توپولوژیک دیگری را کشف کردند. ای. بت ۱۹۵۶ و اس. کریپکی ۱۹۶۵ برای منطق شهودی سمانتیک‌های ساده‌تری را طراحی کرده‌اند و امروزه، سمانتیک کریپکی که مبتنی بر جهان‌های ممکن است از محبوبیت فراوانی برخوردار شده و از این رو، بیشتر به کار می‌رود.

از کارهای دیگری که در زمینه منطق شهودی انجام شده می‌توان به این موارد اشاره کرد: گنتزن ۱۹۳۴ برای آن حساب رشته‌ها فراهم آورد؛ یوهانسون ۱۹۳۶، با انتقاد از پارادوکس EFQ که هر گزاره‌ای را از تناقض استنتاج می‌کند، منطق شهودی مینیمال را معرفی کرد که به منطق ربط نزدیک‌تر است؛ مایکل دامت ۱۹۷۷ برای آن فرازبانی شهودی تدارک دید؛ آلبرت ویسر ۱۹۸۱، برای صورت‌بندی اثبات‌پذیری صوری و برای جلوگیری از پارادوکس دروغگو، قاعده وضع مقدم را در منطق شهودی تضعیف کرد و به منطقی به نام «منطق پایه» رسید. این منطق، امروزه، یکی از برنامه‌های پژوهشی در دست انجام است.

فلسفه شهودی

ریاضیات شهودی با بهره‌مندی از منطق خاص خود، پیشرفت‌های بسیاری کرده است. ون دالن ۲۰۰۱ ص ۲۴۷، با ذکر ترجمه‌ای که گودل ۱۹۳۳ میان منطق کلاسیک و منطق شهودی برقرار کرده است، نشان می‌دهد که حساب شهودی (و نه کل ریاضیات شهودی) سازگار است امّا حساب کلاسیک سازگار باشد. از این رو، ون دالن نتیجه می‌گیرد که در حساب شهودی، بصیرتی فلسفی و عمیق را نمی‌توان انتظار داشت. بنابراین، تفاوت‌های فلسفی ریاضیات شهودی و ریاضیات را باید در بخش‌های دیگر، مانند نظریه مجموعه‌ها، نظریه اعداد، جبر، هندسه و غیر آن، جستجو کرد.

در ریاضیات کلاسیک، برای گزاره‌های وجودی، که حکم به وجود یک عدد، یک مجموعه، یک نقطه یا هر چیز دیگر می‌کند، دو نوع برهان وجود دارد: برهان ساختی و برهان غیرساختی. در برهان ساختی، یک عدد، یک مجموعه، یک نقطه یا یک نمونه از هر چیز دیگری که وجودش ادعا شده است به طور مشخص تعیین می‌گردد و به اصطلاح، «ساخته می‌شود». برای مثال، برای وجود زوج گویاساز، دو برهان، یکی ساختی و دیگری غیرساختی، می‌آوریم:

تعریف: زوج مرتب (a , b) گویاساز است امّا a و b، هر دو گویا باشند اما a^b (یعنی a به توان b) گویا نباشد.

قضیه: زوج گویاساز وجود دارد.

برهان ساختی: زوج $(\sqrt{2},\log_2^9)$ که با دو عدد ۲ و ۹ و دو تابع لگاریتم و جذر ساخته‌ایم زوج گویاساز است زیرا:

$$\sqrt{2}^{\log_2^9}=\sqrt{2}^{\log_2^{3^2}}=\sqrt{2}^{2\log_2^3}=(\sqrt{2}^2)^{\log_2^3}=2^{\log_2^3}=3$$

برهان غیرساختی: عدد $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ یا گویاست یا غیر گویا. در صورت اول، زوج $(\sqrt{3},\sqrt{2})$ گویاساز است زیرا فرض کرده‌ایم که عضو اول به توان عضو دوم گویاست. در صورت دوم، زوج $(\sqrt{3}^{\sqrt{2}},\sqrt{2})$ گویاساز خواهد بود زیرا هر دو عضوش، بنا به فرض دوم، غیرگویا هستند اما عضو اول به توان عضو دوم گویاست:

$$(\sqrt{3}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}=\sqrt{3}^{(\sqrt{2}\sqrt{2})}=\sqrt{3}^2=3$$

پس در هر صورت، یک زوج گویاساز وجود دارد. پایان برهان.

آشکار است که برهان غیرساختی آسان‌تر از برهان ساختی است اما با این برهان، تنها فهمیده‌ایم که زوج گویاساز وجود دارد ولی هیچ زوج گویاسازی را بر اساس آن نمی‌توانیم نشان دهیم. از نظر براور، چنین برهان‌هایی، اصولا، برهان نیستند. یک برهان برهان است تنها اگر وقتی وجود چیزی را ادعا کرد، بتواند آن چیز را نشان بدهد (به زبان ریاضی، آن را بسازد.) به نظر براور، همان طور که کانت گفته بود، ما اعداد را در ذهن خود، و به کمک شمارش زمانی، می‌سازیم و اعداد وجود خارجی ندارند تا ما آنها را کشف کنیم. بنابراین تا یک عدد را نساخته باشیم نمی‌توانیم ادعا کنیم که آن عدد وجود دارد! اعداد به کمک شهودهای ذهنی ما ساخته می‌شوند و برهان‌های غیرساختی هیچ کمکی به این شهودها نمی‌کنند. ریاضیات باید شهودی باشد و تمام موضوعات خود را باید خودش بسازد.

بر این پایه، قانون طرد شق ثالث (= امتناع ارتفاع نقیضین) همیشه صادق نیست. تا وقتی ثابت نکرده‌ایم که عدد $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ گویاست (و یا غیر گویاست)، نمی‌توان گفت عدد $\sqrt{3}^{\sqrt{2}}$ یا گویاست یا غیر گویا. از فرض گویا نبودن نمی‌توان

غیرگویا بودن را به دست آورد چنانکه از فرض غیرگویا نبودن، نمی‌توان گویا بودن را استنتاج کرد. با توجه به این، قاعده نقض مضاعف نیز درست نیست زیرا دیدیم که از فرض غیرگویا نبودن، نمی‌توان گویا بودن را استنتاج کرد.

بر اساس این مبانی فلسفی، براور با نظریه مجموعه‌های نامتناهی کانتور به مخالفت برمی‌خیزد. از دیدگاه براور، ما در شهودهای ذهنی خود هرگز نمی‌توانیم مجموعه‌های نامتناهی را بسازیم و بنابراین چنین مجموعه‌هایی وجود ندارند. همان طور که ارسطو گفته بود بی‌نهایت بالفعل وجود ندارد و همه بی‌نهایت‌ها بالقوه هستند. جمله دوم ارسطو به این معناست که بعضی چیزها نهایت ندارند. این جمله سلبی است و هیچ گونه ادعای وجود نمی‌کند. ما در ساختن اعداد طبیعی، هرگز به پایان راه نمی‌رسیم و نامتناهی بودن مجموعه اعداد تنها به این معناست نه به این معنا که مجموعه‌ای وجود دارد که مجموعه همه اعداد است و نامتناهی است. مجموعه همه اعدادی که ساخته شده‌اند همواره متناهی است و مجموعه اعدادی که ساخته نشده‌اند وجود ندارد.

یک راه برای نزدیک کردنِ افکار براور به ذهن این است که ناقض براور را، نه به معنای کذب، بلکه به معنای محال و ممتنع بگیریم. در این صورت، حذف نقض مضاعف می‌گوید اگر محال بودن A محال باشد A صادق است و به تعبیری دیگر، اگر اثبات ناپذیری A اثبات ناپذیر باشد A صادق است. به نظر می‌رسد این سخن نادرست باشد زیرا ممکن است جمله‌ای کاذب باشد و لذا اثبات‌ناپذیر اما راهی برای نشان دادن این امر وجود نداشته باشد، یعنی اثبات ناپذیری آن اثبات ناپذیر باشد. چنان که گفتیم، برای چنین جملاتی از این قبیل، بهترین نمونه‌ای که منطق‌دانان شهودی بدان اشاره کرده‌اند گزاره‌هایی از ریاضیات است که درباره نامتناهی است مانند اصل انتخاب و اصل پیوستار[1] که اگر کاذب باشند ممتنع و اثبات‌ناپذیرند و به نظر می‌رسد که اثبات‌ناپذیری آن‌ها اثبات ناپذیر باشد. (توجه کنید که گزاره‌های ریاضی، برخلاف بسیاری از گزاره‌ها، اگر کاذب باشند ضرورتا کاذب و ممتنع هستند.) به همین دلیل است که ریاضیدانان شهودی این دو اصل را قبول ندارند و آنها را در نظریه مجموعه‌های خود وارد نمی‌سازند. (توجه به این نکته مهم است که ریاضیدانان شهودی این دو اصل کاذب نمی‌دانند آن دو را نه قبول دارند نه انکار می‌کنند، و از این رو، آن دو را جزء قوانین ریاضیات وارد نمی‌کنند. آنها اگر این دو اصل را انکار می‌کنند، در حقیقت، وارد کردن این دو اصل در ریاضیات را انکار می‌کنند نه خود این دو اصل را.)

[1] گودل ۱۹۵۶ پیرامون اصل پیوستار مقاله‌ای خواندنی دارد که ترجمه آن در کتاب زیر به قلم دکتر موحد آمده است:
موحد، ضیاء؛ *از ارسطو تا گودل*، تهران، انتشارات ، ۱۳۸۳.

قواعد

نظام استنتاج طبیعی برای منطق شهودی را می‌توان با تغییر کوچکی در نظام استناج طبیعی منطق کلاسیک (آن گونه که در بیشتر کتاب‌ها مطرح شده است) به دست آورد. در منطق کلاسیک، قاعده نقض مضاعف دوسویه است: الف: معرفی نقض مضاعف $p \vdash \sim\sim p$ و ب: حذف نقض مضاعف: $\sim\sim p \vdash p$. با کنار گذاشتن قسمت دوم، یعنی حذف نقض مضاعف، منطق شهودی به دست می‌آید. با توجه به اینکه قاعده نقض مضاعف، در منطق شهودی، به قاعده‌ای یک‌سویه تبدیل شده است، دیگر نمی‌توان این قاعده را در جزء فرمول‌ها به کار برد.

قواعد استنتاج طبیعی منطقی شهودی به قرار زیر است:

۱. قواعد عاطف:

حذف عاطف:	حذف عاطف:	حذف عاطف:	معرفی عاطف:
$\dfrac{P \wedge Q}{P}$	$\dfrac{P \wedge Q}{Q}$	$\dfrac{P \wedge Q}{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}$	$\dfrac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{P \wedge Q}$

۲. قواعد ناقض:

معرفی نقض مضاعف	برهان خلف (معرفی ناقض)
$\dfrac{P}{\sim\sim P}$	$\begin{array}{l} \lfloor\; P \\ \;\;\vdots \\ \lfloor\; Q \wedge \sim Q \\ \therefore \sim P \end{array}$

۳. قواعد شرطی:

معرفی $\rightarrow$	دلیل شرطی قیاس افتراض	حذف $\rightarrow$ قیاس استثنایی رفع تالی	وضع مقدم
$\dfrac{\sim P}{P \rightarrow Q}$ $\quad$ $\dfrac{Q}{P \rightarrow Q}$	$\begin{array}{l} \lfloor\; P \\ \\ \lfloor\; Q \\ \therefore P \rightarrow Q \end{array}$	$\dfrac{\begin{array}{c}P \rightarrow Q\\ \sim Q\end{array}}{\sim P}$	$\dfrac{\begin{array}{c}P \rightarrow Q\\ P\end{array}}{Q}$

۴. قواعد دوشرطی:

معرفی $\leftrightarrow$

$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} \sim P \\ \sim Q \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array}$$

دلیل شرطی

قیاس افتراض

$$\begin{array}{l|ll} & P & \text{فرض} \\ & \vdots & \\ & Q & \\ \hline & Q & \text{فرض} \\ & \vdots & \\ & P & \\ \hline \therefore & P \leftrightarrow Q & \text{دلیل شرطی} \end{array}$$

حذف $\leftrightarrow$

قیاس استثنایی

رفع تالی	رفع مقدم	وضع تالی	وضع مقدم
$\begin{array}{l} P \leftrightarrow Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array}$	$\begin{array}{l} P \leftrightarrow Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$	$\begin{array}{l} P \leftrightarrow Q \\ Q \\ \hline P \end{array}$	$\begin{array}{l} P \leftrightarrow Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$

۵. قواعد مانع خلو:

معرفی $\vee$

$$\begin{array}{c} P \\ \hline P \vee Q \end{array} \qquad \begin{array}{c} Q \\ \hline P \vee Q \end{array}$$

قیاس استثنایی

$$\begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim Q \\ \hline P \end{array}$$

قیاس مقسم حذف $\vee$

$$\begin{array}{l|l} & P \vee Q \\ & P \\ & \vdots \\ & R \\ \hline & Q \\ & \vdots \\ & R \\ \hline \therefore & R \end{array}$$

نکته‌ای که باید به آن توجه کنیم این است که قاعده برهان خلف، در بیشتر کتاب‌های منطق جدید، تنها به صورت قاعده معرفی ناقض ارائه می‌شود اما ما در این کتاب، برای ساده شدن برهان‌ها، هر دو شکل قاعده برهان خلف، یعنی قاعده معرفی ناقض و قاعده حذف ناقض، را ذکر کردیم:

برهان خلف (معرفی ناقض)   برهان خلف (حذف ناقض)

$$\begin{array}{l|l} & P \\ & \vdots \\ & Q \wedge \sim Q \\ \hline \therefore & \sim P \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} & \sim P \\ & \vdots \\ & Q \wedge \sim Q \\ \hline \therefore & P \end{array}$$

در منطق شهودی، شکل رایج برهان خلف، یعنی معرفی ناقض، معتبر است اما شکل غیررایج آن، یعنی حذف ناقض، برقرار نیست. خواننده‌ای که با نظام استنتاج طبیعی این کتاب انس گرفته است باید توجه کند که برای رسیدن به منطق شهودی، لازم است دو قاعده حذف نقض مضاعف و حذف ناقض را از مجموعه قواعد این کتاب کنار بگذارد.

هم‌چنین باید توجه کرد که در این کتاب، برای معرفی فاصل، دو قاعده جدید بیان کردیم که در بیشتر کتاب‌های منطقی وجود ندارد:

قیاس افتراض   قیاس افتراض

$$\begin{array}{|l} \sim Q \\ \vdots \\ P \\ \hline P \vee Q \end{array} \qquad \begin{array}{|l} \sim P \\ \vdots \\ Q \\ \hline P \vee Q \end{array}$$

این دو قاعده، که به نحوی می‌توان آنها را «حذف ناقض» نیز شمرد، در منطق شهودی، برقرار نیستند و چنان که دیدیم، در بیان قواعد این منطق، آنها را حذف کردیم.

تمرین:

۱. در زیر، قوانین کلاسیک ناقض را به دو بخش تقسیم کرده‌ایم: قابل اثبات در منطق شهودی و غیرقابل اثبات در منطق شهودی: نشان دهید که در برهان کلاسیک بخش اول، نیازی به قاعده حذف نقیض نداریم اما در بخش دوم، بدون این قاعده، اثبات غیرممکن است:

شهودی		**غیرشهودی**	
نفی تناقض (NC)	$\sim(P \wedge \sim P)$	ثالث مطرود (EM)	$P \vee \sim P$
معرفی نقض مضاعف	$P \to \sim\sim P$	حذف نقض مضاعف	$\sim\sim P \to P$
رفع تالی	$((P \to Q) \wedge \sim Q) \to \sim P$ $\sim Q \to ((P \to Q) \to \sim P)$ $Q \to ((P \to \sim Q) \to \sim P)$	رفع تالی	$((\sim P \to Q) \wedge \sim Q) \to P$ $\sim Q \to ((\sim P \to Q) \to P)$ $Q \to ((\sim P \to \sim Q) \to P)$
عکس نقیض	$(P \to \sim Q) \to (Q \to \sim P)$ $(P \to Q) \to (\sim Q \to \sim P)$	عکس نقیض	$(\sim P \to Q) \to (\sim Q \to P)$ $(\sim P \to \sim Q) \to (Q \to P)$
برهان خلف (معرفی ناقض)	$(P \to (Q \wedge \sim Q)) \to \sim P$ $[(P \to Q) \wedge (P \to \sim Q)] \to \sim P$ $(P \to Q) \to ((P \to \sim Q) \to \sim P)$ $(P \to \sim Q) \to ((P \to Q) \to \sim P)$	برهان خلف (حذف ناقض)	$(\sim P \to (Q \wedge \sim Q)) \to P$ $[(\sim P \to Q) \wedge (\sim P \to \sim Q)] \to P$ $(\sim P \to Q) \to ((\sim P \to \sim Q) \to P)$ $(\sim P \to \sim Q) \to ((\sim P \to Q) \to P)$
دمورگان	$(\sim P \wedge \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \vee Q)$ $(\sim P \vee \sim Q) \to \sim(P \wedge Q)$ $(P \wedge Q) \to \sim(\sim P \vee \sim Q)$ $(P \vee Q) \to \sim(\sim P \wedge \sim Q)$	دمورگان	*** $\sim(P \wedge Q) \to (\sim P \vee \sim Q)$ $\sim(\sim P \vee \sim Q) \to (P \wedge Q)$ $\sim(\sim P \wedge \sim Q) \to (P \vee Q)$
استلزام استلزام	$(\sim P \vee Q) \to (P \to Q)$ $(P \vee Q) \to (\sim P \to Q)$	استلزام استلزام	$(P \to Q) \to \sim(\sim P \vee Q)$ $(\sim P \to Q) \to \sim(P \vee Q)$
	$(P \wedge \sim Q) \to \sim(P \to Q)$ $(\sim\sim P \wedge \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \to Q)$		$(P \to Q) \to \sim(P \wedge \sim Q)$
CM	$(P \to \sim P) \to \sim P$	CM′	$(\sim P \to P) \to P$
کذب مقدم کذب مقدم	$P \to (\sim P \to Q)$ $\sim P \to (P \to Q)$		
EQT EFQ قیاس انفصالی	$P \to (Q \vee \sim Q)$ $(P \wedge \sim P) \to Q$ $((P \vee Q) \wedge \sim P) \to Q$		$(P \to Q) \vee (P \to \sim Q)$ $(P \to Q) \vee (\sim P \to \sim Q)$ $(P \to Q) \vee (\sim P \to Q)$
معرفی نقض سور	$\exists x\, A \to \sim \forall x \sim A$ $\forall x\, A \to \sim \exists x \sim A$ $\exists x \sim A \to \sim \forall x\, A$ $\forall x \sim A \leftrightarrow \sim \exists x\, A$	حذف نقض سور	$\sim \forall x \sim \to A \exists x\, A$ $\sim \exists x \sim A \to \forall x\, A$ $\sim \forall x\, A \to \exists x \sim A$

۲. تضعیف قانون نقض مضاعف، نه تنها احکام نقض را تغییر می‌دهد بلکه احکام ادات‌های دیگر را نیز تغییر می‌دهد. برای نمونه، برخی از توتولوژی‌های غیر شهودی را در زیر، می‌آوریم:

	شهودی	غیرشهودی	
W	$(P \to (P \to Q)) \to (P \to Q)$	$((P \to Q) \to P) \to P$	اصل پِرس
W′	$(P \wedge (P \to Q)) \to Q$	$((P \to Q) \to Q) \to ((Q \to P) \to P)$	
CI	$P \to ((P \to Q) \to Q)$	$((P \to Q) \to Q) \to (P \vee Q)$	
WB	$[(P \to Q) \wedge ((Q \to R)] \to (P \to R)$	$(P \to Q) \vee (Q \to P)$	
B	$(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$	$P \vee (P \to Q)$	M_3
CC	$Q \to [(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)]$	$P \to (Q \vee (Q \to R))$	
C	$(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$	$(P \to Q) \vee (P \to (Q \to R))$	
CB	$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$	$(P \to Q) \vee [(P \to R) \to (Q \to R)]$	
BW′	$[P \to (Q \wedge (Q \to R))] \to (P \to R)$		
CS	$(P \to Q) \to [(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)]$		
S	$(P \to (Q \to R)) \to [(P \to Q) \to (P \to R)]$		
	$[(P \to R) \wedge (Q \to R)] \leftrightarrow ((P \vee Q) \to R)$		
	$[(P \to R) \vee (Q \to R)] \to ((P \wedge Q) \to R)$	$((P \wedge Q) \to R) \to [(P \to R) \vee (Q \to R)]$	
	$(P \wedge Q) \to \{[(P \to R) \vee (Q \to R)] \to R\}$		
	$(P \vee Q) \to \{[(P \to R) \wedge (Q \to R)] \to R\}$		

تعریف نقض به استلزام محال

با داشتن تعریف نقیض به استلزام محال (یعنی تعریف $\sim P$ به $P \to \bot$)، بسیاری از احکام ناقض را می‌توان، به کمک قاعده جانشینی، از احکام شرطی به دست آورد. برای نمونه، فرمول $[P \wedge (P \to Q)] \to Q$ که قاعده وضع مقدم شرطی را بیان می‌کند و W' نام دارد، با قاعده جانشینی، فرمول $[P \wedge (P \to \bot)] \to \bot$ را به دست می‌دهد که بنا به تعریف $\sim P$ به $P \to \bot$، فرمول $(P \wedge \sim P) \to \bot$ و لذا $\sim (P \wedge \sim P)$ را نتیجه می‌دهد که همان قانون نفی تناقض (NC) است.

در منطق شهودی مینیمال، همه احکام ناقض را می‌توان از احکام شرطی به دست آورد اما در منطق‌های شهودی، کلاسیک و ربط، این حکم صادق نیست؛ به عبارت دیگر، در منطق شهودی مینیمال، هر قضیه‌ای درباره ناقض، همتایی شرطی دارد و برعکس؛ اما در منطق‌های شهودی، کلاسیک و ربط، برخی قضیه‌های دارای ادات ناقض همتایی در قضیه‌های شهودی، کلاسیک و ربطی ندارند.

تعریف همتا: اگر A فرمولی دارای نماد ناقض و B فرمولی دارای نماد شرطی باشد، و با روش بالا (= جانشینی $\bot$ و به کاربردن تعریف ناقض) بتوان A را از روی B ساخت A را «همتای نقضیِ B» و B را «همتای شرطیِ A» می‌نامیم.

قضیه: برای هر فرمول A، یک همتای شرطی مانند B یافت می‌شود که A شهودی مینیمال است اتا B شهودی مینیمال باشد (قضیه بودن A شرط لازم و کافی برای قضیه بودن B است):

$\forall A \exists B[$همتای شرطیِ A$=B \wedge (\vdash_{MJ} A \leftrightarrow \vdash_{MJ} B)]$

شرط لازمِ این دوشرطی در هیچ یک از منطق‌های شهودی، کلاسیک و ربط برقرار نیست: چنین نیست که اگر B توتولوژی باشد A نیز توتولوژی باشد، چنین نیست که اگر B شهودی باشد، A شهودی و یا حتی توتولوژی باشد و چنین نیست که اگر B ربطی باشد، A ربطی و یا حتی توتولوژی باشد:

$\sim\forall A \exists B[$همتای شرطیِ A$=B \wedge (\vdash_{J} A \to \vdash_{J} B)]$

$\sim\forall A \exists B[$همتای شرطیِ A$=B \wedge (\vdash_{K} A \to \vdash_{K} B)]$

$\sim\forall A \exists B[$همتای شرطیِ A$=B \wedge (\vdash_{R} A \to \vdash_{R} B)]$

در جدول زیر، برخی از گزاره‌های شرطی و گزاره‌های ناقض را که همتای یکدیگرند با نام‌های معروفشان در چهار دسته گرد آورده‌ایم. فرمول‌هایی که در منطق شهودی مینیمال، شهودی یا ربط قضیه‌اند، به ترتیب با «MJ»، «J» و «R» و پارادوکس‌های پرس، توتولوژی‌هایی که نه شهودی‌اند نه ربطی، و غیر توتولوژی‌ها (یعنی فرمول‌هایی که حتی قضیه منطق کلاسیک نیز نیستند) با «P»، «T» و «N» مشخص شده‌اند:

MJ	= Minimal Intuitionist Teorem	T	= Just Totology
J	= Intuitionist Teorem	P	= Pierce Paradox
R	= Relevant Teorem	N	= Non-Totology

	احکام ناقض	(A)	احکام شرطی (B)		
	معرفی نقض مضاعف	$P \to \sim\sim P$	$P \to ((P \to Q) \to Q)$	CI	
	نفی تناقض (NC)	$\sim(P \land \sim P)$	$(P \land (P \to Q)) \to Q$	W′	
	CM	$(P \to \sim P) \to \sim P$	$(P \to (P \to Q)) \to (P \to Q)$	W	
		$((P \to Q) \land \sim Q) \to \sim P$	$[(P \to Q) \land ((Q \to R)] \to (P \to R)$	WB	
R	رفع تالی	$\sim Q \to ((P \to Q) \to \sim P)$	$(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$	B	R
		$Q \to ((P \to \sim Q) \to \sim P)$	$Q \to [(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)]$	CC	
و	عکس نقیض	$(P \to \sim Q) \to (Q \to \sim P)$	$(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$	C	و
		$(P \to Q) \to (\sim Q \to \sim P)$	$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$	CB	
MJ		$(P \to (Q \land \sim Q)) \to \sim P$	$[P \to (Q \land (Q \to R))] \to (P \to R)$	BW′	MJ
	برهان خلف	$[(P \to Q) \to (P \to \sim Q)] \to \sim P$	$[(P \to Q) \land (P \to (Q \to R))] \to (P \to R)$	WS	
		$(P \to Q) \to ((P \to \sim Q) \to \sim P)$	$(P \to Q) \to [(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)]$	CS	
		$(P \to \sim Q) \to ((P \to Q) \to \sim P)$	$(P \to (Q \to R)) \to [(P \to Q) \to (P \to R)]$	S	
		$(P \land Q) \to \sim(\sim P \lor \sim Q)$	$(P \land Q) \to \{[(P \to R) \lor (Q \to R)] \to R\}$		
		$(P \lor Q) \to \sim(\sim P \land \sim Q)$	$(P \lor Q) \to \{[(P \to R) \land (Q \to R)] \to R\}$		
	دمورگان	$(\sim P \lor \sim Q) \to \sim(P \land Q)$	$[(P \to R) \lor (Q \to R)] \to ((P \land Q) \to R)$		
		$(\sim P \land \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \lor Q)$	$[(P \to R) \land (Q \to R)] \leftrightarrow ((P \lor Q) \to R)$		
	حذف نقض مضاعف	$\sim\sim P \to P$	$((P \to Q) \to Q) \to P$		N
	ثالث مطرود (EM)	$P \lor \sim P$	$P \lor (P \to Q)$	M_3	P
	CM′	$(\sim P \to P) \to P$	$((P \to Q) \to P) \to P$	P	P
		$((\sim P \to Q) \land \sim Q) \to P$	$[((P \to R) \to Q) \land (Q \to R)] \to P$		
	رفع تالی	$\sim Q \to ((\sim P \to Q) \to P)$	$(Q \to R) \to [((P \to R) \to Q) \to P]$		
		$Q \to ((\sim P \to \sim Q) \to P)$	$Q \to \{[(P \to R) \to (Q \to R)] \to P\}$		
R	عکس نقیض	$(\sim P \to Q) \to (\sim Q \to P)$	$((P \to R) \to Q) \to ((Q \to R) \to P)$		
		$(\sim P \to \sim Q) \to (Q \to P)$	$[(P \to R) \to (Q \to R)] \to (Q \to P)$		
		$(\sim P \to (Q \land \sim Q)) \to P$	$[(P \to R) \to (Q \land (Q \to R))] \to P$		N
	برهان خلف	$[(\sim P \to Q) \land (\sim P \to \sim Q)] \to P$	$\{((P \to R) \to Q) \land [(P \to R) \to (Q \to R)]\} \to P$		
		$(\sim P \to Q) \to ((\sim P \to \sim Q) \to P)$	$((P \to R) \to Q) \to \{[(P \to R) \to (Q \to R)] \to P\}$		
		$(\sim P \to \sim Q) \to ((\sim P \to Q) \to P)$	$[(P \to R) \to (Q \to R)] \to [((P \to R) \to Q) \to P]$		
		$\sim(\sim P \lor \sim Q) \to (P \land Q)$	$\{[(P \to R) \lor (Q \to R)] \to R\} \to (P \land Q)$		
	دمورگان	$\sim(\sim P \land \sim Q) \to (P \lor Q)$	$\{[(P \to R) \land (Q \to R)] \to R\} \to (P \lor Q)$		
		$\sim(P \land Q) \to (\sim P \lor \sim Q)$	$((P \land Q) \to R) \to [(P \to R) \lor (Q \to R)]$		P
		***	***		P
	کذب مقدم	$\sim P \to (P \to Q)$	$(P \to R) \to (P \to Q)$		
J		$P \to (\sim P \to Q)$	$P \to ((P \to R) \to Q)$		N
	قیاس انفصالی	$((P \lor Q) \land \sim P) \to Q$	$((P \lor Q) \land (P \to R)) \to Q$		
	EFQ	$(P \land \sim P) \to Q$	$(P \land (P \to R)) \to Q$		
	EQT	$P \to (Q \lor \sim Q)$	$P \to (Q \lor (Q \to R))$		
		$(P \to Q) \lor \sim Q$	$(P \to Q) \lor (Q \to R)$		
T		$(P \to Q) \lor (P \to \sim Q)$	$(P \to Q) \lor (P \to (Q \to R))$		P
		$(P \to Q) \lor (\sim P \to \sim Q)$	$(P \to Q) \lor [(P \to R) \to (Q \to R)]$		
		$(P \to Q) \lor (\sim P \to Q)$	$(P \to Q) \lor ((P \to R) \to Q)$		N

در توضیح جدول بالا، گفتنی است که قوانین نقیض به چهار بخش تقسیم شده است که به ترتیب از بالا به پایین، به صورت زیر چیده شده‌اند: ۱. ربطی و شهودی، ۲. ربطیِ غیرشهودی، ۳. شهودیِ غیرربطی و ۴. غیرربطی و غیرشهودی. فرمول‌های شرطیِ معادل این قوانین، در بخش اول، ربطی و شهودی‌اند و در سه بخش بعدی، غیرربطی و غیرشهودی. در این سه بخش،

برخی فرمول‌ها توتولوژی‌اند و برخی دیگر، حتی در منطق کلاسیک، نیز معتبر نیستند. چکیده این تقسیم‌بندی در جدول زیر گرد آمده است:

		احکام شرطی (B)	احکام ناقض(A)		
	R و MJ	ربطی و شهودی	ربطی و شهودی	R و MJ	۱
غیرتوتولوژی	N	غیرربطی و غیرشهودی	ربطیِ غیرشهودی	R	۲
توتولوژی	T				
غیرتوتولوژی	N				
توتولوژی	T				
غیرتوتولوژی	N		شهودیِ غیرربطی	J	۳
توتولوژی	T		غیرربطی و غیرشهودی	T	۴
غیرتوتولوژی	N				

این جدول نشان می‌دهد که در هیچ یک از منطق‌های ربط، شهودی و کلاسیک، تعریف ناقض به کمک ادات‌های شرطی و کذب نمی‌تواند همه احکام ناقض را به دست دهد و نیاز به قواعدی جداگانه برای آن در این منطق‌ها وجود دارد. منطق شهودی مینیمال، برخلاف سه منطق گفته شده است و همه احکام ناقض با تعریف یادشده قابل حصول است.

اصول موضوعه

نظام اصل موضوعی هیتینگ ۱۹۲۸ برای منطق شهودی، به روش هیلبرت بوده، شامل قاعده وضع مقدم و اصل‌موضوع‌های زیر است:

ناقض:	شرطی:
$\sim B \to (B \to A)$ $[(A \to B) \wedge (A \to \sim B)] \to \sim A$	$A \to (B \to A)$
فاصل:	عاطف:
$A \vee A \to A$ $A \vee B \to B \vee A$ $[(A \to C) \wedge (B \to C)] \to ((A \vee B) \to C)$	$A \to A \wedge A$ $A \wedge B \to B \wedge A$ $(A \wedge (A \to B)) \to B$ $[(A \to B) \wedge (B \to C)] \to (A \to C)$ $(A \to B) \to [(A \wedge C) \to (B \wedge C)]$

این اصول موضوعه بسیار نامتقارن است و برای نمونه، اصول عاطف و فاصل، به جز در دو مورد اول، شباهتی به یکدیگر ندارند در حالی که بنابه قواعد دمورگان، هر کدام را با دیگری به همان سان می‌توان تعریف کرد که دومی را با اولی. از این رو این انتظار به جاست که اصول موضوعه مشابه داشته باشند. اما به روش لوکاشویچ، نظام اصل موضوعی برای منطق شهودی، شامل قاعده وضع مقدم و اصول موضوعهٔ زیر است:

ناقض:	شرطی:
$\sim B \to (B \to A)$ $(A \to \sim B) \to (B \to \sim A)$	$A \to (B \to A)$ $[A \to (B \to C)] \to [(A \to B) \to (A \to C)]$
فاصل:	عاطف:
$A \to A \vee B$ $B \to A \vee B$ $(A \to C) \to [(B \to C) \to ((A \vee B) \to C)]$	$A \wedge B \to A$ $A \wedge B \to B$ $(A \to B) \to [(A \to C) \to (A \to (B \wedge C))]$

در بیشتر نظام‌ها، اصل سوم عاطف را با اصل ساده‌تر $(A \to (B \to (A \wedge B))$ جایگزین می‌کنند.

چنان که می‌بینیم، منطق شهودی، بر خلاف منطق ربط، اصل موضوع اول از اصول لوکاشویچ را پارادوکسی نمی‌داند و اصل موضوع سوم، حذف عکس نقیض، را انکار می‌کند. اصل حذف عکس نقیض، $(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$ با دو اصل موضوع اول و قاعده وضع مقدم ما را به حذف نقض مضاعف، $(\neg\neg A \to A)$ ، می‌رسانند که از نظر شهودییان، نادرست است. همان طور که گفتیم دلیل این انکار آن است که در منطق شهودی، ادات نفی، $\sim$، به معنای امتناع، $\neg$، به کار می‌رود.

یک ویژگی صورت‌بندی لوکاشویچ برای منطق شهودی این است که بخش‌های آن از هم متمایز هستند؛ به عبارت دیگر، اصول موضوعه شرطی آن، برای اثبات همه قضایای شرطی این منطق، کافی است؛ اصول موضوعه شرطی و نقضی آن، برای اثبات همه قضایای شرطی و نقضی این منطق، کافی است؛ اصول موضوعه شرطی و عطفی آن، برای اثبات همه قضایای شرطی و عطفی این منطق، کافی است؛ اصول موضوعه شرطی و فصلی آن، برای اثبات همه قضایای شرطی و فصلی این منطق، کافی است.

این ویژگی در صورت‌بندی هیتینگ برای منطق شهودی و حتی در صورت‌بندی لوکاشویچ برای منطق کلاسیک وجود ندارد و اصول موضوعه شرطی آن، برای اثبات همه قضایای شرطی منطق کلاسیک، کافی نیست. برای نمونه، اصل پِرس، P، که اصلی کلاسیک است و با جدول ارزش می‌توان اعتبار آن را اثبات کرد، با اصول موضوعه شرطیِ منطق کلاسیک که همان اصول موضوعه شرطی لوکاشویچ برای منطق شهودی است قابل اثبات نمی‌باشد.

از آنجا که P در منطق شهودی قابل اثبات نیست، از اصول آن مستقل است. این نشان می‌دهد که اصل حذف نقض مضاعف، نقش مهمی در اثبات اصل پِرس P دارد در واقع، تفاوت $J_{\rightarrow}$ و $K_{\rightarrow}$ در همین P است که با افزودن آن به $J_{\rightarrow}$، به نظام $K_{\rightarrow}$ می‌رسیم. منطق شهودی، به دلیل فقدان P ، نسبت به منطق کلاسیک به منطق ربط نزدیک‌تر است و به همین دلیل است که معمولاً منطق‌دانان ربط، نظام خود را با منطق شهودی مقایسه می‌کنند نه با منطق کلاسیک فرگه‌ای.

تمرین

۱. قاعده «وضع مقدم در تالی» را در J اثبات کنید:

$$\frac{\begin{array}{l}A \rightarrow (B \rightarrow C)\\ A \rightarrow B\end{array}}{A \rightarrow C}$$

۲. اگر بخواهیم با قاعده فوق، اصل همانی I ، $A \rightarrow A$، را در J اثبات کنیم چه فرمول‌هایی را باید جانشین B و C ی موجود در آن کنیم؟

۳. با استفاده از تمرین قبل، اصل همانی I ، $A \rightarrow A$، را در J اثبات کنید. (بدون استفاده از قاعده فرعی وضع مقدم در تالی.)

۴. به کمک اصل همانی و استقرای ریاضی نشان دهید که قاعده دلیل شرطی در $J_{\rightarrow}$ و در نظام‌های قوی‌تر برقرار است. (دلیل شرطی: اگر X مجموعه‌ای از فرمول‌ها باشد و داشته باشیم $X,A \vdash B$ آنگاه داریم $X \vdash A \rightarrow B$. راهنمایی: روی تعداد سطرهای برهانِ استدلال اول استقرای ریاضی انجام دهید و استدلال دوم را اثبات کنید.)

۵. نشان دهید که J ضعیف‌ترین نظامی است که در آن وضع مقدم و دلیل شرطی قابل اثبات است. (راهنمایی: اصول موضوعه J را با دلیل شرطی و وضع مقدم اثبات کنید.)

۶. قاعده تعدی شرطی و دو اصل موضوع معادل آن را در J اثبات کنید:

B پسوند $(B \rightarrow A) \rightarrow ((C \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow A))$

B′ پیشوند $(A \rightarrow B) \rightarrow ((B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Trans تعدی $\frac{\begin{array}{l}A \rightarrow B\\ B \rightarrow C\end{array}}{A \rightarrow C}$

۷. با اثبات تمرین‌های بالا، نشان دهید که نظام اصل موضوعی و استنتاج طبیعی منطق شهودی، قضایای یکسان دارند.

S4 و منطق شهودی

علی رغم تفاوت‌ها و نزاع‌هایی که میان منطق شهودی و منطق کلاسیک وجود دارد، میان آنها، شباهت‌هایی نیز هست. برای نشان دادن این شباهت‌ها، چند قضیه را ذکر می‌کنیم. اگر در قضایای منطق کلاسیک، به هر گزاره اتمی یک نقض مضاعف بیفزاییم و فاصل و سور وجودی را به کمک عاطف و سور کلی تعریف کنیم آنگاه قضیه‌ای در منطق شهودی به دست می‌آید. به عبارتی دقیق‌تر، تابعی برای ترجمه فرمول‌ها وجود دارد که قضایای کلاسیک را به قضایای شهودی ترجمه می‌کند. اگر این تابع را با نماد * نشان دهیم به صورت زیر تعریف می‌شود:

برای همه فرمول‌های اتمی: $p^* = \sim\sim p$

$(A \wedge B)^* = (A^* \wedge B^*)$

$(A \vee B)^* = \sim(\sim A^* \wedge \sim B^*)$

$(A \rightarrow B)^* = (A^* \rightarrow B^*)$

$(\forall x\, Ax)^* = \forall x\, A^*x$

$(\exists x\, Ax)^* = \sim \forall x \sim A^*x$

به کمک این تابع، شباهت گفته شده به آسانی قابل بیان است:

$\vdash_{\text{classic}} A \leftrightarrow \vdash_{\text{intuitionistic}} A^*$

همچنین، می‌توان نشان داد که

$\vdash_{\text{classic}} A \leftrightarrow \vdash_{\text{intuitionistic}} \sim\sim A$

$\vdash_{\text{classic}} \sim A \leftrightarrow \vdash_{\text{intuitionistic}} \sim A$

گودل ۱۹۳۳ شباهتی میان منطق شهودی و نظام S4 کلاسیک دریافته بود. او تابعی را معرفی کرد که قضایای این دو نظام را به یک‌دیگر ترجمه می‌کرد. اگر در قضایای S4، به هر گزاره اتمی یک □ بیفزاییم و ناقض و شرطی شهودی را (که از هم‌اکنون، به ¬ و ⟶ نشان می‌دهیم) به ضرورت ناقض کلاسیک و شرطی تابع ارزشی تعریف کنیم (و این دو ادات کلاسیک را برای تمایز، به ~ و ⊃ نشان می‌دهیم) آنگاه قضیه‌ای در منطق شهودی به دست می‌آید. به عبارتی دقیق‌تر، اگر تابع ترجمه گدل را با * نشان دهیم این تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

برای همه فرمول‌های اتمی: $p^* = \Box p$

$(A \wedge B)^* = (A^* \wedge B^*)$

$(A \vee B)^* = (A^* \vee B^*)$

$(A \rightarrow B)^* = \Box(A^* \supset B^*)$

$(\neg A)^* = \Box \sim A$

$(\forall x\, Ax)^* = \forall x\, A^*x$

$(\exists x\, Ax)^* = \exists x\, A^*x$

به کمک این تابع و سمانتیک منطق شهودی و S4، شباهت گفته شده به آسانی قابل بیان است:

$\vdash_{S4} A \leftrightarrow \vdash_{\text{intuitionistic}} A^*$

گسترشی از نظام S4 وجود دارد که شباهت بیشتری به منطق شهودی دارد و برای آن، لازم نیست به گزاره‌های اتمی، یک $\Box$ بیفزاییم. این نظام عبارت است از S4Trive(p). اصل Trive(p) همان اصل Triv است که به متغیرهای جمله‌ای محدود شده است:

$$\text{Triv}: \; A \leftrightarrow \Box A$$
$$\text{Triv(p)}: \; p \leftrightarrow \Box p$$

در نظام S4Trive(p)، میان همه فرمول‌ها و ضرورتشان، هم‌ارزی برقرار نیست و این هم‌ارزی به متغیرهای جمله‌ای و گزاره‌های اتمی محدود شده است. برای نمونه، در این نظام، هرچند فرمول‌های $P \leftrightarrow \Box P$ و $(P \vee Q) \leftrightarrow \Box (P \vee Q)$ قضیه هستند اما $\sim P \leftrightarrow \Box \sim P$، $(\sim P \vee Q) \leftrightarrow \Box (\sim P \vee Q)$ و $(P \supset Q) \leftrightarrow \Box (P \supset Q)$ قضیه نیستند.

اگر $\supset$ و $\sim$ را ادات‌های کلاسیک و $\rightarrow$ و $\neg$ را ادات‌های شهودی در نظر بگیریم در نظام S4Trive(p)، می‌توان $\rightarrow$ و $\neg$ را بر حسب $\supset$ و $\sim$ به صورت زیر تعریف کنیم:

$$\neg A =_{\text{تع}} \Box \sim A$$
$$(A \rightarrow B) =_{\text{تع}} \Box (A \supset B)$$

اکنون می‌توانیم قضیه زیر را، که شبیه قضیه گودل است، اثبات کنیم:

قضیه: اگر فرمول A تنها شامل ادات‌های شهودی و عاطف و فاصل باشد (یعنی ناقض و شرطی کلاسیک در آن موردی نداشته باشد) آنگاه

$$\vdash_{S4Trive(p)} A \leftrightarrow \Box A$$

برهان:

با استقرای ریاضی روی تعداد ادات‌ها، قضیه اثبات می‌شود. حالت صفر، این است که A هیچ اداتی نداشته و متغیر جمله‌ای باشد؛ واضح است که در این صورت، قضیه برقرار است. اکنون برای استقرا، فرض می‌کنیم که قضیه برای ادات‌های شامل ادات‌هایی به تعداد n یا کمتر برقرار است و ثابت می‌کنیم که قضیه برای ادات‌های شامل ادات‌هایی به تعداد $n + 1$ نیز برقرار است. قضیه برای $\neg$ و $\rightarrow$ بی‌نیاز از فرض استقرا اثبات می‌شود:

$$\neg A \dashv\vdash \Box \sim A \dashv\vdash \Box \Box \sim \sim A \dashv\vdash \Box \neg A$$
$$(A \rightarrow B) \dashv\vdash \Box (A \supset B) \dashv\vdash \Box \Box (A \supset B) \dashv\vdash \Box (A \rightarrow B)$$

اما برای عاطف، نیازمند فرض استقرا هستیم:

$$(A \wedge B) \dashv\vdash (\Box A \wedge \Box B) \dashv\vdash \Box (A \wedge B)$$

برای فاصل، نیز فرض استقرا نیاز است؛ ابتدا باید لم زیر را اثبات کنیم:

$$(A \vee B) \dashv\vdash (\Box A \vee \Box B) \vdash \Box (A \vee B)$$

و سپس، از آنجا که داریم:

$$\Box (A \vee B) \vdash (A \vee B)$$

بنابراین، نتیجه می‌شود:

$$(A \vee B) \dashv\vdash \Box (A \vee B)$$
$$\vdash (A \vee B) \leftrightarrow \Box (A \vee B)$$

پایان برهان.

قضیه: اگر فرمول A تنها شامل ادات‌های شهودی و عاطف و فاصل باشد (یعنی ناقض و شرطی کلاسیک در آن موردی نداشته باشد) آنگاه

$$\vdash_{S4Trive(p)} A \leftrightarrow \vdash_J A$$

برهان:

برهان چپ به راستِ قضیه نیازمند سمانتیک است اما جهت راست به چپ آن را به آسانی می‌توان اثبات کرد: اثبات قاعده وضع مقدم برای → در S4 آسان است؛ بنابراین، تنها اصول موضوعهٔ منطق شهودی را اثبات می‌کنیم: از آنجا که در S4 ، قضایای زیر را داریم:

$$\vdash_{S4} \Box A \rightarrow (B \rightarrow A)$$
$$\vdash_{S4} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow C)]$$
$$\vdash_{S4} (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\Box B \rightarrow \neg A)$$
$$\vdash_{S4} \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$$

بنابراین، در S4Trive(p) ، بنا به قضیه قبل، خواهیم داشت:

$$\vdash_{S4Trive(p)} A \rightarrow (B \rightarrow A)$$
$$\vdash_{S4Trive(p)} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)]$$
$$\vdash_{S4Trive(p)} (A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$$
$$\vdash_{S4Trive(p)} \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$$

و این برهان جهت راست به چپِ قضیه را کامل می‌کند. برای جهت چپ به راست، باید منتظر مباحث سمانتیکی بود.

بر اساس این قضیه، می‌توان منطق شهودی را گسترش منطق کلاسیک تلقی کرد و این دیدگاه سنتی را رها کرد که بر اساس آن، این دو منطق، رقیب و متعارض یکدیگر شناخته می‌شوند. هم‌چنین، به سادگی می‌توان برای منطق شهودی، یا همان S4Trive(p)، یک نظام استنتاج طبیعی بنا کرد: در نظام استنتاج طبیعی S4، فرمول‌های دارای □ آغازین می‌توانند بدون از دست دادن □ وارد برهانک‌های وجهی شوند. برای S4Trive(p)، اجازه می‌دهیم که هر فرمول شهودی (یعنی فاقد ~ و ⊃) بتواند وارد برهانک ضروری شود. برای یک نمونه، برهان اصل موضوع $(A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow \neg A)$ را در زیر می‌آوریم. از آنجا که این فرمولی شهودی است مفروض است که A و B نیز شهودی هستند:

1		1	$A \to \neg B$	فرض
2		2	B	فرض
1		3	$\Box(A \supset \Box \sim B)$	تعریف → (۱)
1	$\Box$	4	$A \supset \Box \sim B$	ورود (۳)
1		5	$A \supset \sim B$	اصل T (۴)
2		6	B	ورود (۲)
1 , 2		7	$\sim A$	رفع تالی (۵ و ۶)
1 , 2		8	$\Box \sim A$	خروج (۷)
1 , 2		9	$\neg A$	تعریف ¬ (۸)
1		10	$B \to \neg A$	معرفی شرطی (۲ تا ۹)
		11	$(A \to \neg B) \to (B \to \neg A)$	معرفی شرطی (۱ تا ۱۰)

توجه کنید که ورود B از سطر ۲ به برهانک ضروری به دلیل این فرض بوده که B فرمولی شهودی است. شاید این نظام استنتاج طبیعی طولانی‌تر از نظام استنتاج طبیعی‌ای باشد که قبلا برای منطق شهودی ذکر کردیم و از این رو، این سؤال به ذهن می‌رسد که طرح یک نظام جدیدتر چه سودی دارد؟ پاسخ این است که در این نظام، ما می‌توانیم همه قواعد کلاسیک را بی هیچ نگرانی برای ناقض کلاسیک، ~، به کار ببریم بدون اینکه نیاز باشد شهودی یا شهودی نبودن آنها را بررسی کنیم. از جمله این قواعد، قاعده دمورگان است که همه اشکال آن برای ~ و عاطف و فاصل درست است اما برخی از اشکال آن برای ¬ و عاطف و فاصل نادرست است. همین مسئله برای قاعده استلزام، نقض مضاعف، برهان خلف و ... صدق می‌کند.

سمانتیک منطق شهودی

کریپکی، که در سال ۱۹۶۳، سمانتیک کارآمد خود را برای منطق وجهی S4 بنیان نهاده بود، در سال ۱۹۶۵، سمانتیک مشابهی برای S4Triv(p) و منطق شهودی هیتینگ طراحی کرد. در این سمانتیک، علاوه بر شرط انعکاسی و متعدی بودن رابطه دسترسی که در مدل‌های S4 وجود دارد، کریپکی این شرط را افزود که هر جمله اتمی که در یک جهان صادق است در همه جهان‌های در دسترس آن نیز باشد. این شرط را «شرط توارث» می‌نامند. هر جهان تحت اشراف (= در دسترس) جمله‌های اتمی صادق را از نیاکان خود (= جهان‌های مشرف به خود) به ارث می‌برد. اگر ادات‌های شهودی ⟶ و ¬ را به استلزام اکید و امتناع تعریف کنیم:

$$A \rightarrow B =_{\text{تع}} \Box\,(A \supset B)$$
$$\neg A =_{\text{تع}} \Box \sim A$$

آنگاه سمانتیک کریپکی برای S4Triv(p) و منطق شهودی برابر است با سمانتیک S4 به همراه شرایط زیر:

شرط توارث: هر متغیر جمله‌ای صادق در یک جهان، در همه جهان‌های تحت اشراف آن صادق است

$$\forall p \in \text{Variables}\ \ (\text{Ruw} \supset (\vDash_u p \supset \vDash_w p))$$

توجه کنید که شرط توارث برای صدق متغیرهاست نه برای کذب آنها؛ از این رو، متغیر جمله‌ای کاذب در یک جهان می‌تواند در جهان‌های تحت اشراف صادق باشد. به آسانی می‌توان فراقضیه زیر را ثابت کرد:

قضیه: A قضیه S4Triv(p) است اتا A در همه مدل‌های انعکاسی و متعدی با شرط توارث، معتبر باشد.

اکنون، به تعریف فرمول کلاسیک و فرمول شهودی توجه کنید:

فرمول‌های کلاسیک = فرمول‌های ساخته شده با نمادهای کلاسیک و شهودی □، ~، ⊃، ¬، ⟶، ∧ و ∨

فرمول‌های شهودی = فرمول‌های فاقد نمادهای کلاسیک □، ~ و ⊃ (حداکثر شامل نمادهای شهودی ¬، ⟶، ∧ و ∨)

می‌توان ثابت کرد که شرط توارث را می‌توان به صدق فرمول‌های شهودی تعمیم داد:

قضیه توارث: هر فرمول شهودی صادق در یک جهان، در همه جهان‌های تحت اشراف آن صادق است

$$\forall A \in \text{Intuitionistic Formulas}\ \ (\text{Ruw} \supset (\vDash_u A \supset \vDash_w A))$$

بر اساس قضیه توارث، جهان‌های تحت اشراف، فرمول‌های شهودی صادق بیشتری نسبت به نیاکان خود (= جهان‌های مشرف) دارا هستند. (اگر تشبیه درست باشد شبیه دانش بشری است: دانش انسان قرن بیست و یکم بیشتر از قرن بیستم و

نوزدهم و پیش از آن است. نوادگان دانش نیاکان خود را به ارث می‌برند. تشبیه دیگر این است که بگوییم تاریخ برای نوادگان بسی فربه‌تر از تاریخ برای نیاکان است.)

اگر $V(w)$ و $V(w)$ را، به ترتیب، مجموعه فرمول‌های شهودی صادق در w و u بگیریم آنگاه Ruw نتیجه می‌دهد $V(u) \subseteq V(w)$. بر این اساس، گویی u جزء و بخشی از w است و چنان که در بخش مفاهیم گفتیم، جزء بودن در میان وضعیت‌ها برقرار است نه میان جهان‌های ممکن؛ زیرا چنان که اشاره شد، هیچ جهان ممکنی جزء هیچ جهان ممکن دیگری نیست. بنابراین، جهان‌های ممکن در سمانتیک منطق شهودی، نسبت به فرمول‌های شهودی، حکمِ وضعیت ممکن را دارد نه حکمِ جهان ممکن را و رابطه دسترسی و اشراف حکمِ جزء بودن را دارد. به همین دلیل، در منطق شهودی، می‌توان ادات‌های کلاسیک $\sim$ و $\supset$ را کنار گذاشت و به جای رابطه دسترسی R، از نماد $\leq$ استفاده کرد و شرایط صدق ادات‌ها را به صورت زیر بیان نمود:

$V(A \wedge B, s) = 1$ اتا $V(A, s) = 1$ و $V(B, s) = 1$

$V(A \vee B, s) = 1$ اتا $V(A, s) = 1$ یا $V(B, s) = 1$

$V(A \rightarrow B, s) = 1$ اتا $\forall t \geq s\, [V(A, t) = 1 \supset V(B, t) = 1]$

$V(\neg A, s) = 1$ اتا $\forall t \geq s\, [V(A, t) = 0]$

توجه به این نکته لازم است که جهان‌های ممکن، در سمانتیک کریپکی، برای منطق شهودی، نسبت به فرمول‌های کلاسیک (فرمول‌های دارای $\sim$ یا $\supset$)، واقعا «جهان ممکن» هستند نه صرفا «وضعیت ممکن»: در این جهان‌ها، هر فرمول کلاسیک، یا خودش صادق است یا نقیض کلاسیکش؛ اما همین جهان‌های ممکن، نسبت به فرمول‌های شهودی، وضعیت هستند نه جهان: اگر در جهانی، P کاذب ولی غیر ممتنع باشد (یعنی P، در یکی از جهان‌های تحت اشراف آن جهان، صادق باشد) آنگاه در آن جهان، نه P صادق است نه $\neg P$ و این مثال نقض کافی است تا بفهمیم که در سمانتیک شهودی، جهان‌های ممکن، نسبت به فرمول‌های شهودی، «جهان» نیستند.

بنابراین، سمانتیک کریپکی برای فرمول‌های شهودی، نه «سمانتیک جهان‌های ممکن»، بلکه «سمانتیک وضعیت‌های ممکن» باید نام بگیرد. از این منظر، می‌بینیم که سمانتیک منطق شهودی گسترده‌تر از سمانتیک منطق وجهی است: سمانتیک منطق وجهی تنها جهان‌های ممکن را بررسی می‌کند اما سمانتیک منطق شهودی، علاوه بر جهان‌های ممکن، وضعیت‌های ممکن را نیز وارد بازی می‌کند. (به همین دلیل است که قضایای منطق شهودی کمتر از قضایای منطق کلاسیک است. هرچه سمانتیک گسترده‌تر، مجموعه قضایا کمتر.) در سمانتیک منطق ربط، نه تنها شرط توارث و وضعیت‌های ممکن نقش ایفا می‌کنند، بلکه وضعیت‌های غیرممکن نیز وارد بازی می‌شوند و با کمک آنها، بسیاری از پارادوکس‌های منطق شهودی، غیرمعتبر می‌گردد.

اکنون به سادگی می‌توان برای فرمول‌های شهودی که قضیه منطق شهودی نیستند، مثال نقض (= مدل نقض) فراهم آورد؛ برای نمونه، $\neg\neg P \rightarrow P$ را در نظر بگیرید که با فرمول $\Box(\Box \sim \Box \sim P \supset P)$ و با فرمول ساده‌تر $\Box(\Box \Diamond P \supset P)$ معادل است. این فرمول را در مدل S4 زیر می‌توان کاذب کرد:

	P	$\Box(\Box\Diamond P \supset P)$
u	0	0 1 1 1 0 1

↓

	P	$\Diamond P$
w	1	1 1

اما اگر A را فرمول شهودی بگیریم آنگاه فرمول $\neg\neg A \rightarrow A$ که با فرمول $\Box(A \supset \Box\sim\Box\sim A)$ و با فرمول ساده‌تر $\Box(A \supset \Box\Diamond A)$ معادل است، نمی‌تواند در مدل S4Triv(p) (یعنی مدل S4 که شرط توارث برای آن برقرار است) کاذب باشد:

	$\Box(A \supset \Box\Diamond A)$
v	0

↓

	$A \supset \Box\Diamond A$
u	1 0 0 1 1

↓

	$\Diamond A$
w	0 0

چنان که می‌بینیم، کاذب بودن این فرمول مستلزم این است که فرمول A که در u صادق است در w کاذب باشد در حالی که بنا به شرط توارث، همه فرمول‌های صادق در u باید در w صادق باشند و این تناقض است. پس این فرمول نمی‌تواند کاذب باشد و بنابراین، معتبر است.

تمرین:

۱. نشان دهید که قضایای منطق کلاسیک که در بخش قواعد، به عنوان تمرین ذکر شد، در سمانتیک بالا، معتبرند.

۲. برای هر یک از فرمول‌های غیرشهودی در همان تمرین، یک مدل نقض بیابید.