منطق قدیم

۸۵/۹/۲۲

گزاره در منطق قدیم و منطق جدید

معانی گزاره

اگر «گزاره» را اسم آلت و به معنای ابزار گزارش بگیریم جمله‌های خبری گزاره خواهند بود اما اگر «گزاره» را اسم مفعول و به معنای گزارش شده و محتوای گزارش بگیریم جمله‌های انشایی نیز حاوی گزاره خواهند شد. برای نمونه، آنچه میان گزارشِ «علی رفت»، پرسشِ «آیا علی رفت؟»، فرمانِ «علی! برو»، تعجب و شگفتیِ «علی رفت!» و آرزویِ«کاش علی می‌رفت» مشترک است چیزی است که با عبارت مصدری «رفتن علی» یا عبارت موصولی «اینکه علی برود» بیان می‌کنیم. عبارت‌های مصدری بیان کنندهٔ محتوای گزارش، محتوای پرسش، محتوای فرمان و محتوای دیگر افعال گفتاری است.

«گزاره» و proposition را، در منطق قدیم، به معنای جمله خبری می‌گیرند اما در منطق جدید و فلسفه تحلیلی، به معنای محتوای جمله خبری به کار می‌برند تا بر پایه آن، بتوانند زبان صوری و نمادینِ منطق پرسشی، منطق تکلیف، منطق احتمال، و دیگر منطق‌ها را بازسازی کنند.

گزاره
- در منطق قدیم به معنای خاص: = گزاره = گزارش = اخبار = خبر = جمله خبری= مرکب تام خبری
- در منطق جدید به معنای عام: = گزاره = گزارش شده = محتوای خبر = محتوای پرسش

انواع گزاره

گزاره‌ها، در زبان طبیعی، به صورت‌های گوناگون به کار می‌روند که شناخت آن‌ها برای شناخت منطقیِ زبان طبیعی ضروری است. انواع زبان‌شناختی گزاره‌ها را در زیر می‌آوریم:

گزاره
- جمله‌ای:
  - اخباری (خبری): علی رفت- علی می‌رود- علی خواهد رفت
  - التزامی (انشایی): علی رفته باشد- علی برود
- موصولی:
  - اخباری (خبری): اینکه علی رفت- اینکه علی می‌رود- اینکه علی خواهد رفت
  - التزامی (انشایی): اینکه علی رفته باشد- اینکه علی برود
- مصدری: رفتن علی (در حال، گذشته یا آینده)

توجه به این نکته لازم است که گزاره‌های موصولی از نظر نحوی و دستوری، شبیه گزاره‌های جمله‌ای است اما از نظر معنا و سمانتیک، شبیه مصدر است.

ادات‌های گزاره‌ای

ادات‌های گزاره‌ای کلمه یا کلمه‌هایی هستند که گزاره‌ها را ترکیب می‌کنند و گزاره جدیدی می‌سازند. ادات‌های گزاره‌ای گوناگون، انواع گوناگونی از گزاره‌ها را ترکیب می‌کنند؛ برای نمونه، ادات «اگر» گزاره‌های جمله‌ای را و ادات «موجبِ ... است» گزاره‌های مصدری را ترکیب می‌کند. در زیر چند نوع ادات گزاره‌ای را ذکر می‌کنیم:

انواع ادات گزاره‌ای	۱. جمله – جمله‌ای:[1]	اگر:	«اگر» علی بیاید شاد می‌شوم
		با اینکه:	«با اینکه» علی آمد شاد شدم
	۲. مصدر – جمله‌ای:	موجب می‌شود که:	آمدن علی «موجب می‌شود که» شاد شوم
		با:	«با» آمدن علی، شاد می‌شوم
	۳. مصدر– مصدری:	موجبِ ... است:	آمدن علی «موجبِ» شادی من «است»
		به شرطِ:	شادی من «به شرطِ» آمدن علی

در منطق قدیم، گزاره را به حملی و شرطی تقسیم می‌کنند و برای شرطی، چهار قسم ذکر می‌کنند: متصل، منفصل مانع جمع، منفصل مانع خلو و منفصل حقیقی. تفاوت مهم این چهار قسم در ادات‌ها و کلماتی است که در زبان طبیعی برای آنها به کار می‌رود: برای متصل، از الفاظی مانند «اگر ... آنگاه ...» و معادل‌های آن و برای انواع منفصل، از الفاظی مانند «یا ... یا ...» استفاده می‌کنند.

[1] در زبان‌شناسی، جمله‌ای را که بدون فاصله بعد از یک ادات می‌آید «جمله پیرو» و جمله‌ای را که پیش از ادات یا پس از جمله پیرو می‌آید «جمله پایه» می‌نامند. گویی، در زبان‌شناسی، ادات و جمله پیرو بخشی از جمله پایه به شمار می‌رود: «اگر علی بیاید من شاد می‌شوم» معادل است با «من از آمدن علی شاد می‌شوم». جمله دوم شبیه این جمله است: «من از تهران می‌آیم».

در منطق، جمله پایه و پیرو و اصلی و فرعی نداریم. گویی، در منطق، ادات گزاره‌ای بر روی هر دو گزاره آمده و هر دو را به یکسان جزئی از یک گزاره دیگر ساخته است. به همین دلیل است که در منطق، «سازه اول» و «سازه دوم» یا «مقدم» و «تالی» داریم نه پایه و پیرو یا اصلی و فرعی.

انواع ادات در منطق قدیم:

- گزاره
  - حملی
  - شرطی
    - متصل: اگر آب را بجوشانیم تبخیر می‌شود
    - منفصل
      - حقیقی: این عدد یا زوج است یا فرد است
      - مانع جمع: این جسم یا سفید است یا سیاه
      - مانع خلو: مکافات عمل یا در دنیاست یا در آخرت

تفاوت مهم دیگر این است که میان مقدم و تالی، در متصل، نوعی اتصال، همراهی، پیوستگی و وابستگی وجود دارد (جوشاندن آب همراه و مستلزم تبخیر آن است،) و در منفصل، نوعی انفصال، جدایی، دوری و دشمنی وجود دارد (زوج و فرد، سیاه وسفید، دنیا و آخرت). البته در وجود انفصال و جدایی در مانع خلو، ایرادهایی وارد است اما تفاوت اول (اینکه در زبان طبیعی، برای هر سه قسمِ منفصل، ادات مشترک «یا ... یا ...» به کار می‌رود) آن ایرادها را جبران می‌کند. از اینجا، می‌توان دریافت که تقسیم فوق، تا حدودی، تقسیمی لفظی و ناظر به زبان طبیعی و لذا استقرایی است و نباید آن را به صورت یک تقسیم عقلی و منطقی در نظر گرفت که هیچ قسم ناشناخته دیگری برای آن وجود نداشته باشد. منطق‌دان‌های جدید، با کندوکاو زبان طبیعی و استقرای بیشتر، انواع جدیدی از ادات‌هایی را که گزاره‌ها را ترکیب می‌کنند یافته و از این هم فراتر رفته‌اند و با تقسیم عقلی و منطقی، انواع دیگری را کشف کرده‌اند که در زبان طبیعی، معادلی ندارند.

در ابتدا، معادل‌های گوناگونی را که برای ادات‌های منطق قدیم در زبان طبیعی وجود دارد ذکر می‌کنیم و سپس، با معرفی ادات‌های جدید و معادل‌های زبانی آنها، به تحلیل آنها در منطق جدید می‌پردازیم.

برای هر یک از ادات‌ها، نمادی را که در منطق جدید به کار می‌رود در کنار آن آورده‌ایم تا خواننده به مرور با آن آشنا شود. برای نقیض، نماد «$\sim$» و برای شرطی متصل، نماد «$\rightarrow$» و برای منفصل مانع جمع، نماد «$\uparrow$» و برای مانع خلو، نماد «$\vee$» و برای انفصال حقیقی، نماد «$\updownarrow$» به کار می‌رود.

معادل‌های تقریبی ادات‌ها

«نه»، $\sim$

۱. مگر [برای استفهام انکاری] [مگر تو نگفته بودی که سیگار ضرر دارد= تو گفته بودی]
۲. اگر [به خدا اگر من گفته باشم= به خدا من نگفته‌ام]

«اگر»، →

۱. جمله‌ای:

۱. چنانچه، در صورتی که، به فرض اینکه، به شرط اینکه، مشروط به اینکه، فرض کنید که
۲. هنگامی که، وقتی که، زمانی که، به محض اینکه
۳. که [این دکمه را که فشار بدهی بمب منفجر می‌شود]
۴. تا [تا این دکمه را فشار بدهی بمب منفجر می‌شود]
۵. کافی است [کافی است این دکمه را فشار دهید؛ بمب منفجر خواهد شد]

۲. مصدری:

۱. در صورتِ، به فرضِ، به شرطِ، مشروط بر
۲. با [با بارش باران، زمین تر می‌شود]
۳. هنگامِ، در وقتِ، در زمانِ، به محضِ
۴. کافی است [برای انفجار بمب، کافی است این دکمه را بفشرید]
۵. شرط کافیِ ... است [فشردن این دکمه شرط کافیِ انفجار بمب است]
۶. لازمهٔ ... است [انفجار بمب، لازمهٔ فشردن این دکمه است]
۷. شرط لازمِ ... است [وجود ابر در آسمان شرط لازم برای بارش باران است]

«آنگاه»، →

۱. جمله‌ای:

۱. در آن صورت، در این صورت، آن وقت، در آن زمان
۲. تنها اگر، فقط وقتی [باران می‌آید فقط وقتی که هوا ابری باشد= اگر باران ببارد آنگاه هوا ابری است]
۳. تا [به همراه فعل امر: ورزش کنید تا تن‌درست باشید= اگر ورزش کنید آنگاه تن‌درست خواهید بود]
۴. که [به همراه فعل نهی: جنگ نکنید که شکست می‌خورید= اگر جنگ کنید آنگاه شکست می‌خورید]
۵. موجب می‌شود که، باعث می‌شود که، سبب می‌شود که
۶. مستلزم آن است که، علت آن است که

۲. مصدری:

۱. باعث ... می‌شود، سبب ... می‌شود، موجب ... می‌شود
۲. علت ... است، مستلزم ... است، شرط کافی ... است

«یا»ی مانع جمع، ↑

۱. «یا ... یا ...»، «چنین نیست که ... و ...»، «... و ... نیست»
۲. ... با ... جمع نمی‌شود، ... و ... جمع نمی‌شوند،

۳. ناسازگارند، متضادند، غیر قابل جمع‌اند، ممنوع‌الجمع‌اند، منع جمع دارند
۴. باهم صادق نیستند

«یا»ی مانع خلو، $\vee$

۱. «یا ... یا...»
۲. مگر، مگر اینکه [باران نمی‌آید مگر اینکه ابر در آسمان باشد]
۳. به جز، به جز اینکه، و الا، در غیر این صورت،
۴. با هم کاذب نیستند

«یا»ی حقیقی، $\updownarrow$

همه اداتهایی که برای منع خلو به کار می‌روند برای انفصال حقیقی نیز به کار می‌روند اما یای حقیقی، معادل‌های ویژه خود را نیز داراست:

۱. ناهم‌ارز است با
۲. متناقض است با
۳. نقیضِ ... است
۴. پادارزِ ... است

برخی از ادات‌های جدید

شرطی معکوس: «تنها اگر»، $\leftarrow$

آوردن کلمات حصر مانند «تنها» و «فقط» به روی گزاره‌های شرطی، معنای آن را تغییر می‌دهد. برای نمونه، «فقط وقتی که هوا ابری باشد باران می‌آید» به این معناست که «وقتی هوا ابری نیست باران نمی‌بارد».[2] بنا به قاعده‌ای در

[2] توجه شود که آنچه در علم اصول فقه، «مفهوم مخالف» نامیده می‌شود غیر از آن است که ادات‌های حصر بیان می‌کنند. سه گزاره زیر را در نظر بگیرید:

الف: «اگر باران ببارد ابر در آسمان است»
ب: «اگر باران نبارد ابر در آسمان نیست».
ج: «تنها اگر باران ببارد ابر در آسمان است»

در اصول فقه، معنای گزاره ب مفهوم مخالفِ گزاره الف است. مفهوم مخالف (و نیز مفهوم موافق) در برابر منطوق است؛ منطوق یک جمله همان معنای حقیقی است که آن جمله برای آن وضع شده است اما مفهوم یک جمله (چه مخالف چه موافق) معنایی است که از جمله فهمیده

منطق قدیم و جدید، به نام عکس نقیض، این گزاره برابر است با «وقتی باران می‌بارد هوا ابری است». از اینجا، در می‌یابیم که «فقط وقتی که الف، ب» معادل است با «وقتی ب، الف». همچنین است «تنها اگر الف، ب» که معادل است با «اگر ب، آنگاه الف». بنابراین، ترکیب کردن «تنها» با «وقتی» یا «اگر» معنای شرطی را معکوس می‌کند.

دوشرطی: «اگر و تنها اگر»، ↔

منطق‌دان‌های قدیم از این نکته آگاه بوده‌اند که گاهی در شرطی‌های متصل، استلزام از دو سو برقرار است مانند:

اگر این عدد زوج است به دو قابل قسمت است؛
اگر این جسم انسان است ناطق است؛

با این وجود، هیچ اداتی در زبان طبیعی نمی‌شناختند که این استلزام دوسویه را بتواند بیان کند. از این رو، در منطق قدیم، برای دوشرطی، قوانینی ذکر نشده است. ظاهرا، در زبان طبیعی هیچ اداتی برای دوشرطی قرارداد نشده است و باید آن را با دو جمله یا با یک جمله و یک عبارت پس ازآن، بیان کرد:

اگر این عدد زوج است به دو قابل قسمت است و برعکس؛
اگر این جسم انسان است ناطق است و برعکس؛

به احتمال قوی، ریاضی‌دانان اولین کسانی بودند که با ترکیب «اگر» و «تنها اگر»، عبارت «اگر و تنها اگر» را برای دو شرطی وضع کرده و منطق‌دانان جدید از آنها برگرفته‌اند. در زیر، چند معادل تقریبی برای دوشرطی را آورده‌ایم:

۱. اگر و تنها اگر، اتا
۲. اگر و فقط اگر
۳. فقط و فقط اگر (این عبارت را که چندان درست ساخت نیست! برخی به کار می‌برند)
۴. متلازم است با، ملازمِ ... است، ... لازم و ملزوم هستند
۵. شرط لازم و کافیِ ... است
۶. هم‌ارز ... است، معادل است با، هم‌توان است با

می‌شود ولی به دلیل کثرت استعمال یا قرینه‌های زبانی یا عقلی. از آنجا که معنای ب غالبا از گزاره الف فهمیده می‌شود و در آن ادات نفی به کار رفته است، می‌گویند معنای ب «مفهوم مخالفِ الف» است. اما گزارهٔ ج بنا به وضع، معنای ب را می‌رساند نه به دلیل کثرت استعمال یا به کمک قرینه. به عبارت دیگر، منطوق ب و ج یکی است و چنین نیست که ب مفهوم مخالف ج است.

واو عطف، ۸

جای بسی شگفتی است که یکی از ادات‌هایی که در زبان طبیعی بسیار کاربرد دارد و در دستور زبان، مهم‌ترین ادات عطف شناخته می‌شود، یعنی ادات «و»، در منطق قدیم، مورد بحث و بررسی قرار نگرفته است. شاید یک دلیل، این باشد که سادگی بیش از حد و بدیهی بودن قوانین آن سبب شده است مورد توجه قرار نگیرد؛ مگر نه این است که امور بدیهی غالبا نادیده گرفته می‌شوند و ماهی، در دریا، آب را نمی‌بیند.

۱. هم ... هم...	هم علی آمد هم حسن
۲. با	علی با حسن آمد
۳. با	با شنیدن صدای او، به سویش برگشتم
۴. تا، به محض اینکه	تا صدایش را شنیدم به سویش برگشتم
۵. وقتی، هنگامی که	وقتی صدایش را شنیدم به سویش برگشتم
۶. که	صدایش را که شنیدم به سویش برگشتم
۷. که	در اندیشه بودم که صدایش را شنیدم
۸. به علاوه، علاوه بر این،	
۹. علاوه بر اینکه، مضافا اینکه	
۱۰. دوما اینکه، ثانیا	
۱۱. اما، لکن، ولی،	
۱۲. در حالی‌که، با اینکه	در این ادات‌ها، نوعی انتظار تضاد و ناسازگاری و انفصال وجود دارد
۱۳. با وجود اینکه،	
۱۴. اگرچه، هرچند	
۱۵. اگر	اگر عبداله مجرم است از دوستان است
	اگر کاسنی تلخ است از بوستان است
۱۶. موصوف و صفت	این، سیب سرخ است = این سیب است و این سرخ است

علائم استدلال، در زبان طبیعی، علاوه بر استلزام میان مقدمات و نتیجه، صدق مقدمات و نتیجه را نیز بیان می‌کنند و این خود یکی از تفاوت‌های شرطی و استدلال در زبان طبیعی است: میان دو گزاره «اگر هوا خوب باشد به گردش می‌روم» و «چون هوا خوب است به گردش می‌روم»، این تفاوت هست که اولی، برخلاف دومی، نتیجه نمی‌دهد که هوا خوب است و به گردش می‌روم. بنابراین، علائم استدلال نیز را می‌توان جزء آن دسته از ادات‌هایی دانست که تقریبا معادل واو عطف هستند. (توجه کنید که صورت استدلال، برخلاف خود استدلال، متضمن صدق مقدمات و نتیجه خود نیست و از آنجا که «استدلال» در زبان منطق جدید، به معنای صورت استدلال است، استدلال‌ها در زبان منطق جدید متضمن معنای واو عطف نیست.)

علائم استدلال بر دو گونه است: علائم مقدمه و علائم نتیجه. علامت مقدمه در ابتدای مقدمه و علامت نتیجه در ابتدای نتیجه می‌آید و از این راه قابل شناسایی هستند. در زیر برای هر یک از علائم استدلال، چند نمونه آورده‌ایم:

علائم استدلال	علائم مقدمه:	چون، زیرا، از آنجا که، به دلیل اینکه، برای اینکه، به علت اینکه، به دلیلِ، به علتِ،
	علائم نتیجه:	پس، بنابراین، لذا، در نتیجه، نتیجتًا، نتیجه می‌شود که، به همین دلیل، به این علت که

سمانتیک

انواع ادات‌ها در منطق قدیم

هر گزاره یکی از دو حالت را دارد: یا صادق است یا کاذب. گزاره نمی‌تواند نه صادق باشد نه کاذب. صدق و کذب گزاره را «ارزشِ» آن گزاره می‌نامند. از آنجا که در منطق رایج، هر گزاره، یکی و فقط یکی از دو ارزش صدق و کذب را دارد، به این منطق «منطق دوارزشی» می‌گویند.[3] وقتی دو گزاره داشته باشیم، چهار حالت پدید می‌آید: ۱. هر دو صادق، ۲. هر دو کاذب، ۳. اولی صادق و دومی کاذب و ۴. عکس حالت قبل. امکان ندارد حالت دیگری رخ دهد زیرا دو گزاره داریم و هر کدام یکی از دو ارزش صدق و کذب را دارند و ۲×۲=۴. اگر گزاره سومی نیز داشته باشیم آن گزاره، در هر یک از چهار حالت پیش، یا صادق است یا کاذب؛ بنابراین، هشت حالت خواهیم داشت: ۲×۲×۲=۲×۴=۸ . به همین صورت، اگر گزاره چهارمی داشته باشیم ۱۶ حالت (۸×۲=۱۶) و اگر پنج گزاره داشته باشیم ۳۲ حالت (۱۶×۲=۳۲) و ... خواهیم داشت. به طور کلی، تعداد حالت‌ها برابر است با عدد دو به توان تعداد حروف گزاره‌ای. اگر n حرف گزاره‌ای داشته باشیم آنگاه تعداد حالت‌ها = ۲^{n}.

جدول ارزش

دو حالت داشتن یک گزاره را به دو صورت زیر نشان می‌دهند.

P
1
0

صادق

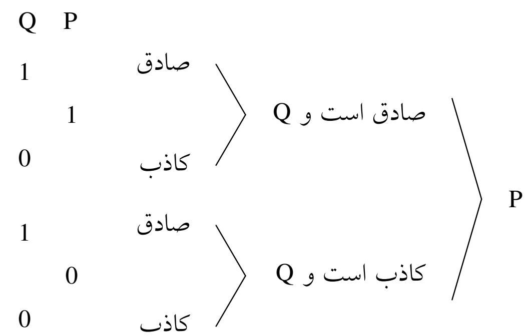
P

کاذب

1 و 0، به ترتیب، نمادهای صدق و کذب هستند و معنای عددی خود را در اینجا ندارند. چهار حالت داشتن دو گزاره را به چهار صورت می‌توان نشان داد:

[3] منطق‌های چندارزشی نیز مورد بررسی منطق‌دانان جدید قرار گرفته است که به برخی گزاره‌ها، ارزشی غیر از صدق و کذب نسبت داده می‌شود. این منطق‌ها را «منطق غیراستاندارد» یا «منطق غیرکلاسیک» می‌گویند.

P	Q	
1	1	P صادق و Q صادق
1	0	P صادق و Q کاذب
0	1	P کاذب و Q صادق
0	0	P کاذب و Q کاذب



هشت حالت داشتن سه گزاره را نیز به چهار صورت زیر می‌توان نشان داد:

P	Q	R	
1	1	1	P صادق و Q صادق و R صادق
1	1	0	P صادق و Q صادق و R کاذب
1	0	1	P صادق و Q صادق و R صادق
1	0	0	P صادق و Q صادق و R کاذب
0	1	1	P صادق و Q صادق و R صادق
0	1	0	P صادق و Q صادق و R کاذب
0	0	1	P صادق و Q صادق و R صادق
0	0	0	P صادق و Q صادق و R کاذب

از چهار روش فوق برای نشان دادن حالت‌های گوناگونِ ارزش گزاره‌ها، روش اول (سمت راست) در تقسیم‌بندی‌های متداول در کتاب‌های گوناگون، کاربرد بسیار دارد اما روش چهارم (سمت چپ) در کتاب‌های منطقی، رایج است و با کم‌ترین فضا و بیشترین وضوح، برتری بسیاری بر سه روش دیگر دارد. در این روش، قاعده این است که ابتدا، تعداد سطرهای جدول ارزش را از تعداد حروف گزاره‌ای از طریق ۲^n به دست می‌آوریم و سپس به تعداد نیمی از آنها، نماد 1 زیر حرف اول یعنی P می‌گذاریم و به همان تعداد، نماد 0 زیر آن حرف می‌نویسیم. برای حرف دوم تعداد 1 ها و 0 ها را نصف می‌کنیم و برای حرف بعدی به همین صورت تا حرف آخر. همواره، زیر حرف آخر، 1 و 0 به طور متوالی یکی پس از دیگری نوشته می‌شود. برای مثال، برای چهار حرف گزاره‌ای P، Q، R و S به صورت زیر عمل می‌کنیم. : تعداد سطرها = $۲^۴$ = ۱۶. پس برای P، هشت 1 و هشت 0 می‌نویسیم و این کار را برای Q، چهار تا چهار تا و برای R، دو تا دو تا و برای S، یکی یکی انجام می‌دهیم:

P	Q	R	S
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

اگر با عددنویسی بر مبنای ۲ آشنا باشید سطر پایین، برابر با صفر و سطر بالا برابر پانزده است. به جدول بالا، «جدول ارزش» می‌گویند و ستون یک‌ها و صفرها زیر هر گزاره را «جدول ارزشِ» آن گزاره را می‌نامند. هر سطر جدول ارزش نشانگر یکی از حالت‌های ممکن است. سطرهای جدول ارزش، نام‌های گوناگونی دارند: «تعبیر»، «مدل»، «الگو»، «مثال»، «ارزش‌دهی» و «جهان ممکن».

جدول ارزش = جدولی شامل حروف گزاره‌ای و همه ارزش‌های محتمل برای آنها
جدول ارزشِ یک گزاره = ستونی از یک و صفر که در جدول ارزش، زیر آن گزاره نوشته می‌شود
تعبیر = مدل = الگو = مثال = ارزش‌دهی = جهان ممکن = یک سطر از سطرهای جدول ارزش

جدول ارزشِ اداتها

با توضیحات بالا، می‌توان جدول ارزش نقیض را به صورت زیر بیان کرد:

P	~P
1	0
0	1

جدول بالا می‌گوید وقتی P صادق است P~ کاذب است و وقتی P کاذب است P~ صادق است. این دقیقا همان چیزی است که از معنای نقیض یک گزاره می‌فهیم. ارزش نقیض یک گزاره، همواره، بر خلاف ارزش آن گزاره است.

برای به دست آوردن جدول ترکیب عطفی، باید به این نکته توجه کنیم که گزاره «الف و ب» تنها وقتی صادق است که هم الف صادق باشد و هم ب صادق باشد. در غیر این صورت، (یعنی وقتی یکی یا هر دو کاذب باشند،) ترکیب عطفی «الف و ب» کاذب خواهد بود. چکیده این نکته‌ها را می‌توان به صورت جدول زیر بیان کرد:

PQ	P∧Q
11	1
10	0
01	0
00	0

برای به دست آوردن جدول ارزش مانع جمع، کافی است توجه کنیم که ترکیب مانع جمع، نقیض ترکیب عطفی است زیرا ترکیب عطفی دو گزاره یعنی جمع آن دو گزاره و از این رو، منع جمع دو گزاره به معنای منع و کذب ترکیب عطفی آن دو گزاره است. از ترکیب جدول ارزشِ ناقض و جدول ارزشِ عاطف، به جدول ارزشِ مانع جمع می‌رسیم:

PQ	P∧Q	~(P∧Q)	P↑Q
11	1	0	0
10	0	1	1
01	0	1	1
00	0	1	1

چنانکه می‌بینیم، ترکیب عطفی و منع جمع در هر سطر، ارزش‌های نابرابر دارند و این ناشی از تناقض میان آنهاست. در منع جمع، صدق دو طرف ممکن نیست اما کذب یک یا هر دو طرف ممکن است.

برای به دست آوردن جدول ارزش مانع خلو، باید به این نکته توجه کنیم که در مانع خلو، کذب دو طرف ممکن نیست اما صدق یک یا دو طرف ممکن است. از اینجا، می‌توان فهمید که ترکیب مانع خلو وقتی کاذب است که دو طرف آن کاذب باشد و الا (یعنی وقتی یک یا دو طرف صادق است) منع خلو صادق است. این نکته‌ها را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

PQ	P∨Q
11	1
10	1
01	1
00	0

برای به دست آوردن جدول ارزش انفصال حقیقی، باید به این نکته توجه کنیم که در این نوع، نه صدق دو طرف ممکن است نه کذب دو طرف اما صدق یک طرف و کذب طرف دیگر ممکن است. از اینجا، می‌توان فهمید که انفصال حقیقی، وقتی که دو طرف آن هم‌ارزش باشند کاذب است و وقتی که ارزش دو طرف آن نابرابر باشد صادق است. این نکته‌ها را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

PQ	Q↕P
11	0
10	1
01	1
00	0

جدول انفصال حقیقی را به صورت دیگری نیز می‌توانستیم به دست آوریم: می‌دانیم که انفصال حقیقی هم مانع جمع است و هم مانع خلو. این نشان می‌دهد که ترکیب عطفی مانع جمع و مانع خلو برابر است با انفصال حقیقی:

PQ	[(P∨Q)	∧	(P↑Q)]	Q↨P
11	1	0	0	0
10	1	1	1	1
01	1	1	1	1
00	0	0	1	0

برای به دست آوردن جدول ارزش دوشرطی، باید به این نکته توجه کنیم که در دوشرطی، به دلیل استلزام دوطرفه، صدق یک طرف و کذب طرف دیگر ممکن نیست و باید یا هر دو طرف صادق باشند یا هر دو طرف کاذب. از اینجا، می‌توان فهمید که دوشرطی برخلاف دوفصلی (= انفصال حقیقی) است و هنگامی صادق است که دو طرف آن هم‌ارزش باشند و در صورتی کاذب است که ارزش دو طرف آن نابرابر باشد. این نکته‌ها را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم:

PQ	P↔Q
11	1
10	0
01	0
00	1

بیان جدول ارزش شرطی نسبتا دشوارتر از سایر ادات‌هاست. برای فهم این جدول توجه کنید که گزاره شرطی «اگر الف آنگاه ب» مدعی این است که الف همراه ب است و بدون آن نمی‌آید. به همین دلیل بوده است که منطق‌دانان قدیم، گزاره شرطی را «متصل» یا «استصحابی» به معنای «همراهی» نام‌گذاری کرده بودند. اینکه «الف بدون ب نمی‌آید» یعنی چنین نیست که «الف هست اما ب نیست». بنابراین، وقتی مقدم، صادق و تالی، کاذب است گزاره شرطی، کاذب است مانند «اگر باران ببارد زمین خشک می‌ماند» و در غیر این صورت، (یعنی وقتی مقدم، کاذب یا تالی، صادق باشد،) گزاره شرطی صادق است مانند «اگر درخت گیاه است رشد می‌کند» که دو طرف آن صادق است و «اگر سنگ گیاه است رشد می‌کند» که دو طرف آن کاذب است و «اگر اسب گیاه است رشد می‌کند» که مقدم کاذب اما تالی صادق است.

PQ	P→Q
11	1
10	0
01	1
00	1

سطر دوم جدول، تنها سطری است که در آن، «مقدم بدون تالی آمده است» و به همین دلیل، سطر دوم، تنها سطری است که شرطی در آن کاذب است.

در شرطی معکوس، مقدم و تالی جابجا می‌شوند و از این رو، این نوع شرطی تنها در سطر سوم کاذب است:

PQ	$P \leftarrow Q$
11	1
10	1
01	0
00	1

همان‌طور که دو فصلی از ترکیب عطفی مانع جمع و خلو به دست آمده است، دو شرطی نیز از ترکیب عطفی میان شرطی مستقیم و معکوس به دست می‌آید:

PQ	$[(P \leftarrow Q)$	$\wedge$	$(P \rightarrow Q)]$	$P \leftrightarrow Q$
11	1	1	1	1
10	1	0	0	0
01	0	0	1	0
00	1	1	1	1

یک نکته مهم درباره شرطی‌ها این است که این سه نوع شرطی هر کدام به دو قسمِ «لزومی» و «اتفاقی» تقسیم می‌شوند. معنا و شرایط صدقِ شرطی‌های لزومی و اتفاقی را نمی‌توان با جدول ارزش بیان کرد و برای آن، منطق جداگانه‌ای به نام «منطق ربط» تدوین شده است که جداگانه باید مورد بررسی قرار گیرد. شرطی‌ها، در اینجا، نسبت به لزومی و اتفاقی، عام هستند و کار کردن با آنها بسیار ساده‌تر از شرطی‌های لزومی و اتفاقی است. به همین دلیل است که در آغاز منطق، از این نوع شرطی‌های عام و تابع ارزشی استفاده می‌شود.

نکته مشابهی برای فصلی‌ها وجود دارد: هر یک از فصلی‌ها به دو قسم «عنادی» و «اتفاقی» تقسیم می‌شود و ما در اینجا، معنا و شرایط صدقِ فصلی‌های عام و تابع ارزشی را بیان کرده‌ایم. فصلی‌های عنادی و اتفاقی نیز باید در منطق ربط مورد بحث و بررسی قرار گیرند.

چکیده جدول‌های ارزش را در زیر آورده‌ایم:

		عطفی (جامع)	نواو (مانع جمع)	فصلی (مانع خلو)	دوفصلی (حقیقی)	دوشرطی	شرطی	شرطی معکوس
A	B	$A \wedge B$	$A \uparrow B$	$A \vee B$	$A \updownarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \rightarrow B$	$A \leftarrow B$
1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	1	1

تاکنون، تنها ادات‌ها و ترکیب‌هایی را مورد بحث سمانتیکی و معنایی قرار دادیم که در منطق قدیم شناخته شده بودند؛ اما ترکیب‌های بسیار دیگری نیز هست که منطق نمادین آنها را به ما شناسانده است. در بخش بعدی، به معرفی و بیان این ادات‌ها می‌پردازیم.

انواع ادات‌ها در منطق جدید

ادات‌های یک موضعی

برخی ادات‌های گزاره‌ای، مانند «البته» و «هرگز» روی یک گزاره عمل می‌کنند و از آن، یک گزاره جدید می‌سازند. این ادات‌ها را «یک‌موضعی» می‌نامند. ادات‌های یک موضعی بر چهار قسم هستند: ایجابی، سلبی، همیشه‌صادق و همیشه کاذب. این ادات‌ها را در نمودار زیر نشان داده‌ایم:

ادات‌های یک موضعی	۱. ایجابی:	البته، حتما، واقعا، در واقع، در حقیقت، راست است که، چنین است که
	۲. سلبی:	نـ ، نه، چنین نیست که، دروغ است که، درست نیست که
	۳. همیشه صادق:	الف یا نه الف، اگر الف آنگاه الف
	۴. همیشه کاذب:	الف و نه الف

مثال‌ها:

ادات‌های یک موضعی	۱. ایجابی:	البته او خواهد آمد، حتما به دیدنش خواهم رفت، راست است که گفته‌اند نابرده رنج، گنج میسر نمی‌شود
	۲. سلبی:	علی نیامد، نه هر که چهره برافروخت دلبری داند، چنین نیست که علی آمد، دروغ است که علی آمد
	۳. همیشه صادق:	اکنون یا شب است یا شب نیست، اگر فردا برف ببارد برف می‌بارد
	۴. همیشه کاذب:	اکنون هم شب است هم شب نیست، فردا هم باران می‌بارد هم نمی‌بارد

برای ادات ایجابی، هیچ نمادی در منطق جدید قرارداد نشده است زیرا ایجاب گزاره با خود آن گزاره هم‌ارزش است و حداکثر، تاکید بیشتری دارد. برای ادات سلبی غالبا از نماد ~ استفاده می‌شود. برای همیشه صادق و همیشه کاذب، ادات‌های تک کلمه‌ای در زبان طبیعی یافت نمی‌شود؛ اما با تسامح، می‌توان نمونه‌های گفته شده را برای آنها ذکر کرد. ما برای این دو ادات، نمادهای T و F را برمی‌گزینیم:

P	البته P	~P	Tp	Fp
صادق	صادق	کاذب	صادق	کاذب
کاذب	کاذب	صادق	صادق	کاذب

در جدول بالا، برای اختصار، به جای صادق و کاذب، از نمادهای 1 و 0 استفاده می‌کنیم. به یاد داشته باشید که نمادهای 1 و 0 در اینجا به هیچ وجه، نمادهای ریاضی نیستند و صرفا کوتهنوشتی برای صادق و کاذب به شمار می‌آیند. جدول بالا را به اختصار چنین می‌نویسیم:

P	البته P	~P	Tp	Fp
1	1	0	1	0
0	0	1	1	0

ادات‌های دوموضعی

منطق قدیم تنها پنج نوع ترکیب میان دو گزاره را شناسایی کرده است: شرطی ساده، دوشرطی، انفصال مانع جمع، مانع خلو و انفصال حقیقی. در منطق قدیم، از شرطی معکوس، انواع عطفی و انواع حذفی و ثابت بحثی به میان نیامده و تحلیل و بررسی از آنها صورت نگرفته است.

منطق‌دانان قدیم ترکیب‌های عطفی را اصولاً دو گزاره جدا می‌دانستند نه یک گزاره مرکب. به گمان آنها، ترکیب عطفی، در حقیقت، دو حکم و دو خبر است. برای نمونه، وقتی می‌گوییم «اگر باران بارد زمین تر می‌شود و هوا لطیف می‌گردد» دو گزاره را بیان کرده‌ایم: «اگر باران بارد زمین تر می‌شود» و «اگر باران بارد هوا لطیف می‌گردد». این گمان باطل است زیرا وقتی ترکیب عطفی در مقدم یک شرطی قرار می‌گیرد نمی‌توانیم بگوییم که دو حکم و دو خبر داریم؛ برای نمونه، وقتی می‌گوییم «اگر باران ببارد و زمین حاصل‌خیز باشد گیاهان می‌رویند» دو گزاره زیر را بیان نکرده‌ایم: «اگر باران ببارد گیاهان می‌رویند» و «اگر زمین حاصل‌خیز باشد گیاهان می‌رویند». ترکیب عطفی اگر جزئی از یک فرمول قرار بگیرد ویژگی‌هایی نو می‌یابد که بررسی آن‌ها بر عهده منطق است. منطق جدید، با همین ملاحظات، ترکیب عطفی را وارد زبان خود کرده و احکام سمانتیکی و برهانی آن را بیان کرده است.

نمادهایی را که برای انواع ادات‌های شرطی، ادات مانع خلو و ادات عطف ساده آورده‌ایم در بسیاری از کتاب‌های منطق کاربرد دارند و نمادهای نواو و نیا از منطق‌دانی به نام شفر است که به افتخار او، «نمادهای شفر» خوانده می‌شوند. نماد انفصال حقیقی را از ترکیب دو نماد مانع جمع و خلو برساخته‌ایم و نمادهای آرین و ناری نیز که اشاره به بزرگ‌تر یا کوچک‌تر بودن ارزش مقدم نسبت به تالی دارد نیز از برساخته‌های نویسنده است. بر اساس این نمادگذاری، می‌توان نمادهای $\leq$ ، $\geq$ و = را، به ترتیب، برای شرطی مستقیم، شرطی معکوس و دوشرطی و نماد $\neq$ را برای انفصال حقیقی نیز به کار برد.

ادات‌های حذفی در زبان فارسی عباراتی مانند «حتی اگر» و «... چه ... چه ...» و «... خواه ... خواه ...» است که برای آن در منطق جدید، نمادی قرارداد نشده است زیرا ادات‌های حذفیِ ایجابی، هم‌ارزش است با بخشی از گزاره و همان بخش را به جای کل می‌توان نوشت و ادات‌های حذفیِ سلبی نیز برابر است با سلب یک بخش که هم‌ارز است با نماد ~ و آن بخش. اینجا نیز ادات‌های ثابت، در زبان طبیعی معادل تک‌کلمه‌ای ندارند و ما با تسامح، مثال‌های مذکور را ذکر کرده‌ایم.

اداتهای دوموضعی:

۱. شرطی:	۱. شرطی (مستقیم)	$A \to B$	اگر الف آنگاه ب
	۲. شرطی معکوس	$A \leftarrow B$	تنها اگر الف، ب
	۳. دوشرطی (هم‌ارزی)	$A \leftrightarrow B$	الف، اگر و تنها اگر ب
۲. فصلی:	۴. مانع جمع (نواو)	$A \uparrow B$	یا الف یا ب
	۵. مانع خلو (فصلی)	$A \vee B$	الف یا ب
	۶. حقیقی (دوفصلی)	$A \updownarrow B$	الف یا ب
۳. عطفی:	۷. عطفی (ساده)	$A \wedge B$	الف و ب
	۸. نیا (نقیض یا)	$A \downarrow B$	نه الف نه ب
	۹. آرین (آری— نه)	$A > B$	الف بدون اینکه ب
	۱۰. ناری (نه– آری)	$A < B$	بجای اینکه الف، ب
۴. حذفی: حذف مقدم	۱۱. ایجاب تالی:		حتی اگر الف، ب
	۱۲. سلب تالی:		حتی اگر الف، نه ب
حذف تالی	۱۳. ایجاب مقدم:		الف، حتی اگر ب
	۱۴. سلب مقدم:		نه الف، حتی اگر ب
۵. ثابت:	۱۵. همیشه صادق	$A\,T\,B$	اگر الف و ب آنگاه الف
	۱۶. همیشه کاذب	$A\,F\,B$	الف و ب بدون الف

از برتری‌های این نظام نشانه‌گذاری، می‌توان به دو نکته اشاره کرد: اول اینکه قاعده جابجایی تنها برای اداتهایی برقرار است که نمادهای آنها با جابجایی تغییر نکند مانند $\wedge$، $\vee$، $\updownarrow$، $\uparrow$، $\downarrow$ و $\leftrightarrow$ اما اداتهای $\to$، $\leftarrow$، $>$ و $<$ که با جابجایی تغییر می‌کنند قاعده جابجایی در مورد آنها صدق نمی‌کند.

برتری دوم این است که با افزودن یا کاستن خط تیره از اداتها، نماد اداتهای متناقض به دست می‌آید. برای نمونه، ادات $\to$ و $<$ که تنها در یک خط تیره تفاوت دارند متناقضند (یعنی در هیچ سطری ارزش یکسان ندارند.)

اگر نمادهای مانع خلو و نیا (یعنی $\vee$ و $\downarrow$) را جابجا کنیم نمادگذاری بسیار زیبا و بسیار آسانی برای به‌یادسپاری به دست می‌آوریم زیرا در این صورت، همان طور که نمادهای شرطی دارای خط افقی هستند، نمادهای فصلی دارای خط عمودی و نمادهای عطفی، همگی، فاقد خط می‌شوند. از امتیازات این تعویض نمادها، یکی این است که در روش نموداری برای تعیین اعتبار استدلال‌ها، اداتهای خط دار (یعنی شرطی‌ها و فصلی‌ها) همگی دو شاخه می‌سازند

اما ادات‌های فاقد خط (یعنی عطفی‌ها) تنها یک شاخه تولید می‌کنند. از آنجا که این تعویض نمادها مخالف با بیشتر کتاب‌های منطقی است از انجام آن خودداری می‌کنیم.

ادات‌های > و < را می‌توان تعبیر ریاضی کرد به این معنا که $P>Q$ را که می‌گوید P بدون Q صادق است می‌توان چنین تعبیر کرد: ارزش P بزرگ‌تر از ارزش Q است. برای بیشتر ادات‌های منطقی، معادل‌های ریاضی وجود دارد. برای نمونه، $P\rightarrow Q$ را می‌توان چنین تعبیر کرد: ارزش P کوچک‌تر از ارزش Q است یعنی $P\leq Q$. (برای درستی این تعبیر، به جدول ارزش شرطی نگاه کنید.) ترکیب عطفی و مانع خلو نیز، به ترتیب، مینیمم و ماکسیمم ارزش‌های دو مؤلفه را دارا هستند. برای حذفی‌های ایجابی نیز از تابع‌های افکنشِ اولین مؤلفه first(A,B) و دومین مؤلفه second(A,B) می‌توان استفاده کرد که به صورت ساده‌تر fst(A,B) و snd(A,B) نوشته می‌شوند. دوشرطی و دوفصلی نیز که به معنای هم‌ارزشی و ناهم‌ارزشی هستند با نمادهای مساوی = و نامساوی ≠ قابل بیان هستند.

در زیر، ادات‌های دوموضعی را به همراه جدول ارزش هر کدام و معادل‌های ریاضی‌شان آورده‌ایم:

		1	2	3	4	5	6	7	8
			Max(A,B)	A≥B	Fst(A,B)	A≤B	Snd(A,B)	A=B	Min(A,B)
A	B	ATB	A∨B	A←B	A	A→B	B	A↔B	A∧B
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
		همیشه ثابت	مانع خلو	شرطی معکوس	ایجاب مقدم	شرطی	ایجاب تالی	دوشرطی	عطفی

		16	15	14	13	12	11	10	9
								A≠B	
A	B	AFB	A↓B	A<B	~A	A>B	~B	A↕B	A↑B
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
		همیشه کاذب	نیا	تاری	سلب مقدم	آرین	سلب تالی	دوفصلی (حقیقی)	نواو (مانع جمع)

دو ستون چپ برای نشان دادن چهار حالت ممکن برای دو گزاره A و B آمده و به همین دلیل، با خطی از سایر ستون‌ها جدا شده است. دو جدول بالا، در حقیقت، قرینه تناقض یک‌دیگر هستند. نقیض هر ترکیب، برابر است با ترکیب زیرین یا بالایی آن؛ برای نمونه، ترکیب عطفی ساده و ترکیب نواو متناقض هستند و نقیض ترکیب مانع خلو برابر است با ترکیب نیا. شماره‌های جدول زیرین را از راست به چپ نوشته‌ایم زیرا باید به همین ترتیب، در ادامه جدول بالایی می‌آمد که به دلیل محدودیت فضا به پایین منتقل شده است.

چنانکه می‌بینیم، جدول بالا چهار سطر و شانزده ستون دارد.

چهار سطر جدول به دلیل این است که هر دو گزاره چهار حالت دارند: ۱. هر دو صادق، ۲. هر دو کاذب، ۳. اولی صادق و دومی کاذب و۴. عکس قبل. این چهار حالت به این دلیل است که هر گزاره به تنهایی دو حالت دارد یا صادق است یا کاذب (یعنی منطق ما دو ارزشی است)؛ و وقتی دو گزاره داشته باشیم و هر کدام دو حالت داشته باشند حاصل‌ضرب حالت‌ها چهار حالت خواهد بود.

شانزده ستون نیز از این جا به دست آمده است که گزاره مرکب از دو گزاره، در هر یک از چهار حالت بالا، یا صادق است یا کاذب؛ یعنی گزاره مرکب در هر یک از حالت‌های چهارگانه، دو حالت دارد که حاصل‌ضرب چهار عدد دو برابر است با شانزده. بر اساس این محاسبات، با حصر عقلی، همه گزاره‌های مرکب از دو گزاره را در بالا به دست آورده‌ایم.

برای سه گزاره، هشت سطر و ۲۵۶ ستون خواهیم داشت و این نشان می‌دهد که ۲۵۶ ترکیب سه موضعی می‌تواند وجود داشته باشد. از آنجا که اثبات شده است همه ترکیب‌های سه موضعی را می‌توان بر حسب ترکیب‌های دو موضعی بازنویسی کرد، منطق‌دانان از بررسی ترکیب‌های سه موضعی خود را معاف داشته‌اند.

مفاهیم فرامنطقی

ضروري، ممکن و ممتنع

توتولوژي، ممکن الصدق و همیشه‌کاذب

گزاره‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند: ضروری، ممکن و ممتنع. گزاره ضروری همواره صادق است و گزاره ممتنع هرگز صادق نیست و گزاره ممکن گاهی صادق و گاهی کاذب است. برخی گزاره‌ها، در فلسفه یا ریاضیات، ضروری‌اند مانند «وجود اصیل است» و «هر عدد طبیعی زوج یا فرد است» اما برخی گزاره‌ها، ضرورت منطقی دارند مانند «وجود یا اصیل است یا اصیل نیست»، «هر عدد طبیعی یا زوج است یا زوج نیست» و «هر عدد طبیعی اگر زوج باشد زوج است». گزاره‌های منطقا ضروری همیشه به این سادگی نیستند و اثبات آنها به تأمل و اندیشه فراوان نیاز دارد. برای نمونه، گزاره زیر که به ضدقیاس معروف است چندان بدیهی نیست «اگر دو گزاره مستلزم گزاره سومی باشند آنگاه هر یک از آنها، هنگام کذب گزاره سوم، مستلزم کذب دیگری است».

گزاره‌های منطقا ضروری را «همیشه‌صادق»، «راستگو» و «توتولوژی» نیز می‌گویند و گزاره‌های منطقا ممکن را «صدق‌پذیر» می‌نامند. واژه «ممکن» را نیز به دو معنا یکی عام و یک خاص به کار می‌برند. «ممکن عام» یعنی «گاهی صادق» و «صدق‌پذیر»؛ و «ممکن خاص» یعنی «گاهی صادق و گاهی کاذب» و «صدق و کذب پذیر». گزاره‌های منطقا ممتنع را گاهی «متناقض» یا «ناسازگار» نیز می‌نامند اما چون ما این دو واژه را به دو معنای دیگر به کار می‌بریم، این دو را به معنای ممتنع نمی‌گیریم.

جدول ارزش گزاره‌های راستگو، ستونی از 1 است و جدول ارزش گزاره‌های ممتنع، ستونی از 0 است و جدول ارزش گزاره‌های ممکن، ستونی از 1 و 0 است. فرمول‌های $P\to P$، $P\vee\sim P$ و $\sim(P\wedge\sim P)$ راستگویند و فرمول $P\wedge\sim P$ ممتنع است اما فرمول‌های P، Q، $P\wedge Q$ و $P\to Q$ ممکن هستند زیرا در جدول ارزش آنها، هم 1 هست هم 0.

فرمول
- گاهی صادق است: ممکن عام، صدق‌پذیر
  - همیشه صادق است: ضروری، راستگو، توتولوژی
  - گاهی صادق نیست: ممکن خاص
- هرگز صادق نیست: ممتنع، همیشه‌کاذب

غالبا، صدق در همه سطرهای جدول ارزش را با نماد $\vDash$ نشان می‌دهند. بر این اساس، مفاهیم بالا را به صورت زیر می‌توان نمادی کرد:

فرمول A
- $\nvDash\sim\mathbf{A}$ ممکن عام، صدق‌پذیر
  - $\vDash\mathbf{A}$ ضروری، راستگو، توتولوژی
  - $\nvDash\mathbf{A}$ ممکن خاص
- $\vDash\sim\mathbf{A}$ ممتنع، همیشه‌کاذب

تمرین

۱. کدام یک از گزاره‌های منطقا ضروری زیر بدیهی هستند؟ (T یعنی صادق و F یعنی کاذب)

1. T
2. $\sim F$
3. $P\vee T$
4. $T\uparrow P$
5. $P\to T$
6. $F\to P$
7. $T>F$
8. $F<T$
9. $F\updownarrow T$
10. $T\updownarrow F$
11. $P\to P$
12. $P\to(Q\to P)$
13. $((P\to Q)\to P)\to P$
14. $(P\to(Q\to R))\to[(P\to Q)\to(P\to R)]$
15. $P\to(P\vee Q)$
16. $(P\wedge Q)\to P$
17. $(P\wedge Q)\to Q$
18. $(P\wedge\sim P)\to Q$
19. $(P\wedge Q)\to(Q\wedge P)$
20. $(P\wedge Q)\to(Q\vee P)$
21. $P\vee\sim P$
22. $\sim(P\wedge\sim P)$
23. $P\vee(P\to Q)$
24. $\sim P\to(Q\to P)$
25. $(P\to Q)\vee(Q\to P)$
26. $(P\to Q)\vee(Q\to R)$
27. $(P\to Q)\vee(\sim P\to R)$
28. $(P>Q)\uparrow(Q>P)$
29. $(P>Q)\uparrow(P<Q)$
30. $(P>Q)\uparrow(R>Q)$
31. $P\uparrow\sim P$
32. $P\updownarrow\sim P$
33. $\sim(P\updownarrow P)$
34. $P\uparrow(P\uparrow P)$
35. $P\uparrow(P\downarrow Q)$
36. $(P\downarrow P)\uparrow(P\wedge Q)$
37. $(P\downarrow P)\updownarrow(P\vee Q)$
38. $(P\uparrow P)\updownarrow(P\wedge Q)$
39. $[(P\uparrow P)\uparrow(P\uparrow P)]\uparrow(P\uparrow P)$
40. $[P\downarrow(P\downarrow P)]\downarrow[P\downarrow(P\downarrow P)]$

۲. با جدول ارزش، ثابت کنید که فرمول‌های بالا راستگو هستند.

۳. با جدول ارزش، ثابت کنید که فرمول‌های زیر ممتنع هستند:

1. F
2. $\sim T$
3. $P\wedge F$
4. $T<F$
5. $P>T$
6. $T\downarrow P$
7. $P<P$
8. $T\to F$
9. $F\leftarrow T$
10. $T\leftrightarrow F$
11. $P>P$
12. $P>(Q\to P)$
13. $((P\to Q)\to P)>P$
14. $(P\to(Q\to R))>[(P\to Q)\to(P\to R)]$
15. $P>(P\vee Q)$
16. $(P\wedge Q)>P$
17. $(P\wedge Q)>Q$
18. $(P\wedge\sim P)>Q$
19. $(P\wedge Q)>(Q\wedge P)$
20. $(P\wedge Q)>(Q\vee P)$
21. $P\wedge\sim P$
22. $\sim(P\vee\sim P)$
23. $P\downarrow(P\to Q)$
24. $\sim P>(Q\to P)$
25. $(P\to Q)\downarrow(Q\to P)$
26. $(P\to Q)\downarrow(Q\to R)$
27. $(P\to Q)\downarrow(\sim P\to R)$
28. $(P>Q)\wedge(Q>P)$
29. $(P>Q)\wedge(P<Q)$
30. $(P>Q)\wedge(R>Q)$
31. $P\updownarrow P$
32. $P\leftrightarrow\sim P$
33. $\sim(P\leftrightarrow P)$
34. $P\wedge(P\uparrow P)$
35. $P\wedge(P\downarrow Q)$
36. $(P\downarrow P)\wedge(P\wedge Q)$
37. $(P\downarrow P)\leftrightarrow(P\vee Q)$
38. $(P\uparrow P)\leftrightarrow(P\wedge Q)$
39. $[(P\uparrow P)\uparrow(P\uparrow P)]\wedge(P\uparrow P)$
40. $[P\downarrow(P\downarrow P)]\vee[P\downarrow(P\downarrow P)]$
41. $T\to(P\wedge\sim P)$
42. $T\leftrightarrow(P\wedge\sim P)$
43. $(P\vee\sim P)\to F$
44. $P\wedge(P<Q)$
45. $P\wedge(Q>P)$
46. $(P\to\sim P)\wedge(\sim P\to P)$
47. $(P\uparrow P)\wedge(P\vee P)$
48. $P\downarrow(P\downarrow P)$
49. $[P\uparrow(P\uparrow P)]\uparrow[P\uparrow(P\uparrow P)]$
50. $[(P\downarrow P)\downarrow(P\downarrow P)]\downarrow(P\downarrow P)$

سازگاری و ناسازگاری

هر دو گزاره، با هم، یا جمع می‌شوند یا جمع نمی‌شوند؛ به اصطلاح منطقی، یا قابل جمع هستند یا مانع جمع. در صورت اول، دو گزاره را «سازگار» و در صورت دوم، «ناسازگار» می‌خوانند.

دو فرمول	**سازگار:**	گاهی با هم صادق هستند
	ناسازگار:	هرگز با هم صادق نیستند

تلازم و توافق

تناقض و تضاد

گزاره‌های سازگار اگر در همه حالات، ارزش یکسان داشته باشند، مانند P و ~~P، «متلازم» و الا، «متوافق» خوانده می‌شوند و گزاره‌های ناسازگار اگر در همه حالات، ارزش‌های نابرابر داشته باشند، مانند P و ~P، «متناقض» و گرنه «متضاد» نام می‌گیرند، مانند P∧Q و P∧~Q. دو گزاره اگر در همه حالات، ارزش یکسان داشته باشند، «هم‌ارز» یا «هم‌ارزش» نامیده می‌شوند.

دو فرمول	سازگار	**متلازم:**	در همه سطرها، ارزش یکسان دارند	هر دو ضروری	**هم‌ارز**
				هر دو ممکن	**هم‌ارز**
		متوافق:	در برخی سطرها، ارزش نابرابر دارند	ضروری و ممکن	**ناهم‌ارز**
				هر دو ممکن	
	ناسازگار	**متناقض:**	در هیچ سطری، ارزش یکسان ندارند	هر دو ممکن	
				ممتنع و ضروری	
		متضاد:	در برخی سطرها، هر دو کاذب هستند	هر دو ممکن	
				ممتنع و ممکن	
				هر دو ممتنع	**هم‌ارز**

تعریف‌ها به همراه مثال:

دو فرمول A و B					
سازگار $\nvDash A\uparrow B$	متلازم $\vDash A\leftrightarrow B$	هر دو ضروری	$P\to P,\ P\lor\sim P$	همارز
		هر دو ممکن	$P,\ \sim\sim P$	همارز
	متوافق $\nvDash A\leftrightarrow B$	ضروری و ممکن	$P\to P,\ P$	ناهمارز
		هر دو ممکن	$P\to Q,\ P\lor Q$	ناهمارز
ناسازگار $\vDash A\uparrow B$	متناقض $\vDash A\updownarrow B$	هر دو ممکن	$P,\ \sim P$	ناهمارز
		ممتنع و ضروری	$P\to P,\ P\land\sim P$	ناهمارز
	متضاد $\nvDash A\updownarrow B$	هر دو ممکن	$P\land Q,\ P\downarrow Q$	ناهمارز
		ممتنع و ممکن	$P,\ P\land\sim P$	ناهمارز
		هر دو ممتنع	$P\leftrightarrow P,\ P\land\sim P$	همارز

در منطق قدیم، «ناسازگار» و «متضاد» را، به ترتیب، «مانع جمع بسیط» و «مانع جمع مرکب» می‌نامیده‌اند.

هم ارزی و تلازم

ابن سینا سازگاری را شرط تلازم می‌داند زیرا به نظر وی، دو گزاره ناسازگار که هر دو ممتنع هستند، در حقیقت، متلازم نیستند هرچند در لفظ متلازمند. گزاره A = «اگر پنج زوج است عدد است» را در نظر بگیرید. به نظر ابن سینا، A در لفظ، لزومی و صادق است اما در حقیقت، کاذب است و هیچ لزومی میان مقدم و تالی آن برقرار نیست. اگر کسی گزاره B راپذیرد که «هر زوج عدد است» ناگزیر، A را باید بپذیرد اما کسی که زوج بودن پنج را می‌پذیرد ممکن است B را نپذیرد و بنابراین نتوان او را به عدد بودن پنج متقاعد کرد.

تبیین این نظر نیازمند آشنایی با منطق ربط است و در اینجا باید گفت که در منطق جدید کلاسیک، سازگاری شرط هم‌ارزی نیست و بنابراین، همه فرمول‌های ممتنع، ناگزیر، هم‌ارزند:

دو فرمول A و B		
همارز $\vDash A\leftrightarrow B$	هر دو ضروری
	هر دو ممکن
	هر دو ممتنع
ناهمارز $\nvDash A\leftrightarrow B$	متوافق
	متناقض
	متضاد

گاهی گزاره $A\leftrightarrow B$ را به جای اینکه «A اگر و تنها اگر B» بخوانند، «A هم‌ارز B است» می‌خوانند. باید توجه کرد که این معنا با معنایی که در بالا گفتیم در این مسئله تفاوت دارند که در معنای اخیر، لازم نیست در همه سطرها، ارزش‌ها یکسان باشد. برای نمونه، دو فرمول ناهم‌ارز $A\wedge B$ و $A\rightarrow B$ در سطر اول جدول ارزش هم‌ارز هستند.

از آنجا که گزاره‌های راستگو، در همه سطرهای جدول ارزش، صادق هستند، هر دو گزارهٔ راستگو، سازگار و هم‌ارزند. هم‌چنین، گزاره‌های ممتنع، چون در همه سطرهای جدول ارزش، کاذب هستند، ناسازگار و هم‌ارزند. دو گزاره، یکی راستگو و دیگری ممتنع، چون در هیچ سطری، ارزش یکسان ندارند، متناقض و ناهم‌ارز هستند.

دو گزارهٔ ممکن خاص می‌توانند سازگار یا ناسازگار، متلازم یا متوافق، متناقض یا متضاد، و هم‌ارز یا ناهم‌ارز باشند. دو گزاره، یکی ممکن و دیگری راستگو، ناگزیر، یک حالت دارند: سازگار، متوافق و ناهم‌ارز. دو گزاره، یکی ممکن و دیگری ممتنع، نیز ناگزیر، یک حالت دارند: ناسازگار، متضاد و ناهم‌ارز.

این حالت‌های نه‌گانه (و به اعتباری، شش‌گانه و به اعتبار دیگری، دوازده‌گانه) را در جدول زیر می‌توان خلاصه کرد:

	ضروری	ممکن	ممتنع
ضروری	سازگار، متلازم و هم‌ارز	سازگار، متوافق و ناهم‌ارز	ناسازگار، متناقض و ناهم‌ارز
ممکن	سازگار، متوافق و ناهم‌ارز	سازگار، متلازم و هم‌ارز سازگار، متوافق و ناهم‌ارز ناسازگار، متناقض و ناهم‌ارز ناسازگار، متضاد و ناهم‌ارز	ناسازگار، متضاد و ناهم‌ارز
ممتنع	ناسازگار، متناقض و ناهم‌ارز	ناسازگار، متضاد و ناهم‌ارز	ناسازگار، متضاد و هم‌ارز

استدلال

استدلال مجموعه‌ای از مقدمات و نتایج است. استدلال گاهی یک طرفه است و گاهی دو طرفه. استدلال یک طرفه مانند عکس مستوی موجب کلی که در آن، «هر الف ب است» نتیجه می‌دهد «بعضی ب الف است» ولی عکس آن درست نیست. استدلال دوطرفه مانند عکس مستوی سالب کلی که در آن «هیچ الف ب نیست» نتیجه می‌دهد «هیچ ب الف نیست» و برعکس.

از این به بعد، مقدما را بالا و نتایج را زیر آن می‌نویسیم و برای جدا کردن مقدمات از نتایج، در استدلال‌های یک طرفه، یک خط افقی و در استدلال‌های دو طرفه، دو خط افقی رسم می‌کنیم. برای نمونه:

هر الف ب است	بعضی الف ب است	هیچ الف ب نیست
―――――	═════	═════
بعضی ب الف است	بعضی ب الف است	هیچ ب الف نیست

گاهی نیز دو استدلال را که در بخشی مشترک هستند، برای اختصار، با هم می‌نویسیم. برای نمونه، عکس مستوی در موجب‌ها را با هم به صورت زیر ترکیب می‌کنیم:

هر الف ب است

―――――

بعضی ب الف است

═════

بعضی الف ب است

استدلال صحیح استدلالی است که مقدماتش، صادق و علاوه بر آن، مستلزم نتیجه باشند. این دو شرط (صدق مقدمات و استلزام نتیجه) به ما اطمینان می‌دهند که نتیجه صادق است. اثبات شرط اول یعنی صدق مقدمات برعهده علوم و فنونی است که به بحث درباره آن مقدمات می‌پردازند؛ اما اثبات شرط دوم یعنی استلزام از مقدمات به نتایج برعهده علم منطق است.

اگر مقدمات مستلزم نتایج باشند استدلال را «معتبر» و در غیر این صورت، «نامعتبر» می‌نامیم. در استدلال معتبر، هرگاه همه مقدمات صادق باشند همه نتایج نیز صادق خواهند بود؛ به عبارت دیگر، استدلال معتبر آن است که هرگز نمی‌شود که همه مقدماتش صادق و برخی نتایجش کاذب باشد.

برای اثبات اعتبار و عدم اعتبار استدلال‌ها، راه‌های بسیاری وجود دارد. اولین راه ترسیم جدول ارزش مقدمات و نتایج است. در این روش، سطری از جدول را جستجو می‌کنیم که در آن، همه مقدمات صادق و برخی نتایج کاذب باشند. اگر چنین سطری یافته شد استدلال نامعتبر و گرنه معتبر خواهد بود.

برای نمونه، قیاس استثنایی «وضع مقدم» و مغالطه «رفع تالی» را در نظر بگیرید:

وضع مقدم:

$P \rightarrow Q$

P

―――

Q

P	→	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
مقدمه	مقدمه	نتیجه

وضع تالی:

$P \rightarrow Q$

Q

―――

P

P	→	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
نتیجه	مقدمه	مقدمه

همان طور که می‌بینیم، در استدلال سمت راست، هیچ سطری یافت نمی‌شود که مقدمات آن صادق و نتیجه‌اش کاذب باشد پس این استدلال معتبر است ولی در استدلال سمت چپ، می‌بینیم که در سطر سوم، همه مقدمات صادق ولی نتیجه کاذب است، از این رو، استدلال نامعتبر است.

از آنجا که روش جدول ارزش گاهی بسیار طولانی و خسته کننده است،[4] منطق‌دانان روش‌های دیگری را ابداع کرده‌اند که بسیار سریع‌تر است. سریع‌ترین این روش‌ها روش ارزش‌دهی است که هم اینک به آن می‌پردازیم.

روش ارزش‌دهی

مبنای این روش، برهان خلف است یعنی فرض می‌کنیم استدلال نامعتبر است یعنی می‌شود که همه مقدمات صادق باشند اما همه نتایج صادق نباشند. برای این کار، نتایج را باید جداگانه مورد بررسی قرار دهیم. به همین منظور، یکی از نتایج را با همه مقدمات در نظر می‌گیریم. همه مقدمات را صادق و نتیجه مورد نظر را کاذب می‌گیریم. صدق و کذب مقدمات را با نوشتن نمادهای ۱ و ۰ نشان می‌دهیم و قواعد ارزش‌دهی را به کار می‌بریم:

قواعد ارزش‌دهی:

۱. هرگاه ارزش دو جزء فرمول را داشته باشیم ارزش کل فرمول به دست می‌آید؛
۲. گاهی، با داشتن ارزش کل فرمول، ارزش دو جزء فرمول به دست می‌آید؛
۳. گاهی، با داشتن ارزش یک جزء فرمول، ارزش کل فرمول به دست می‌آید؛
۴. گاهی، با داشتن ارزش یک جزء فرمول و ارزش کل فرمول، ارزش جزء دیگر به دست می‌آید؛
۵. اگر فرمولی در یک استدلال چند بار به کار رفته بود (به اصطلاح، چند مورد داشت) و ارزش یک مورد به دست آمد موارد دیگر هم آن ارزش را خواهند داشت.

چهار قاعده اول را به آسانی از جدول‌های ارزش ادات‌ها می‌توان به دست آورد.[5]

[4] برای نمونه، اگر پنج حرف گزاره‌ای در استدلال باشد جدول ارزش آن سی و دو سطر باید داشته باشد.

[5] قاعده‌های ۲ تا ۳ را در جدول‌های زیر به اختصار می‌آوریم:

قاعده ۲: ارزش کل فرمول $\Leftarrow$ ارزش دو جزء فرمول

صدق فرمول عطفی⇐ ارزش دو جزء فرمول

کذب فرمول شرطی و فصلی ⇐ ارزش دو جزء فرمول

عطفی‌ها:	$P<Q$ 1 ——— PQ 0 1	$P>Q$ 1 ——— $P\ Q$ 1 0	$P\downarrow Q$ 1 ——— $P\ Q$ 0 0	$P\wedge Q$ 1 ——— $P\ Q$ 1 1	$\sim P$ 1 ——— P 0
شرطی‌ها و فصلی‌ها:	$P\leftarrow Q$ 0 ——— $P\ Q$ 0 1	$P\rightarrow Q$ 0 ——— PQ 1 0	$P\uparrow Q$ 0 ——— $P\ Q$ 1 1	$P\vee Q$ 0 ——— $P\ Q$ 0 0	$\sim P$ 0 ——— P 1

قاعده ۳: ارزش یک جزء فرمول ⇐ ارزش کل فرمول

ارزش یک جزء فرمول ⇐ صدق فرمول‌های شرطی و فصلی

ارزش یک جزء فرمول ⇐ کذب فرمول‌های عطفی

	فصلی‌ها:		شرطی‌ها:				عطفی‌ها:	
P 1 ——— $\sim P$ 0	P 1 ——— $P\vee Q$ 1	Q 1 ——— $P\vee Q$ 1	P 1 ——— $P\leftarrow Q$ 1	Q 1 ——— $P\rightarrow Q$ 1	P 1 ——— $P\downarrow Q$ 0	Q 1 ——— $P\downarrow Q$ 0	P 1 ——— $P<Q$ 0	Q 1 ——— $P>Q$ 0
P 0 ——— $\sim P$ 1	P 0 ——— $P\uparrow Q$ 1	Q 0 ——— $P\uparrow Q$ 1	P 0 ——— $P\rightarrow Q$ 1	Q 0 ——— $P\leftarrow Q$ 1	P 0 ——— $P\wedge Q$ 0	Q 0 ——— $P\wedge Q$ 0	P 0 ——— $P>Q$ 0	Q 0 ——— $P<Q$ 0

با داشتن قواعد فوق می‌توان برهان خلف را به کار برد:

برهان خلف:

۱. فرض می‌کنیم استدلال نامعتبر است یعنی مقدمات را صادق و نتیجه را کاذب می‌گیریم؛
۲. قواعد ارزش‌دهی را تا آنجا به کار می‌بریم که یا به تناقض برسیم یا همه فرمول‌ها ارزش‌دهی شوند؛
۳. اگر به تناقض برسیم معنایش این است که فرض ما نادرست بوده و استدلال معتبر است؛
۴. اگر همه فرمول‌ها، بدون تناقض، ارزش‌دهی شوند استدلال نامعتبر است؛
۵. اگر همه فرمول‌ها ارزش‌دهی شوند همه حروف گزاره‌ای نیز ارزش‌دهی شده‌اند. مجموعه این حروف به همراه ارزش‌هایشان را «مثال نقض» یا «الگوی نقض» می‌نامند. استدلال معتبر مثال نقض ندارد ولی استدلال نامعتبر، دست کم، یک مثال نقض دارد.

مثال نقض، در حقیقت، سطری از جدول ارزش را نشان می‌دهد که در آن، همه مقدماتِ استدلال صادق و نتیجه آن کاذب است. یافتن مثال نقض برای یک استدلال نشان می‌دهد که گاهی مقدمات آن صادق اما نتیجه‌اش کاذب است و این معادل نامعتبر بودن استدلال است.

قاعده ۴: ارزش یک جزء فرمول و ارزش کل فرمول $\Leftarrow$ ارزش جزء دیگر

ارزش یک جزء فرمول و کذب فرمول عطفی $\Leftarrow$ ارزش جزء دیگر

ارزش یک جزء فرمول و صدق فرمول شرطی یا فصلی $\Leftarrow$ ارزش جزء دیگر

عطفی‌ها	$P \wedge Q$ 10 ——— Q 0	$P \wedge Q$ 0 1 ——— P 0	$P \downarrow Q$ 00 ——— Q 0	$P \downarrow Q$ 00 ——— P 0	$P > Q$ 10 ——— Q 1	$P > Q$ 00 ——— P 0	$P < Q$ 00 ——— Q 0	$P < Q$ 01 ——— P 1	عطفی‌ها:
فصلی‌ها	$P \uparrow Q$ 11 ——— Q 0	$P \uparrow Q$ 11 ——— P 0	$P \vee Q$ 0 1 ——— Q 0	$P \vee Q$ 1 0 ——— P 0	$P \rightarrow Q$ 1 1 ——— Q 1	$P \rightarrow Q$ 1 0 ——— P 0	$P \leftarrow Q$ 0 1 ——— P 0	$P \leftarrow Q$ 1 1 ——— P 1	شرطی‌ها:
دوفصلی	$P \updownarrow Q$ 0 0 ——— Q 0	$P \updownarrow Q$ 0 0 ——— P 0	$P \updownarrow Q$ 1 0 ——— Q 1	$P \updownarrow Q$ 0 1 ——— P 1	$P \leftrightarrow Q$ 0 0 ——— Q 1	$P \leftrightarrow Q$ 0 0 ——— P 1	$P \leftrightarrow Q$ 1 0 ——— Q 0	$P \leftrightarrow Q$ 0 1 ——— P 0	دوشرطی:
	$P \updownarrow Q$ 1 1 ——— Q 0	$P \updownarrow Q$ 1 1 ——— P 0	$P \updownarrow Q$ 0 1 ——— Q 1	$P \updownarrow Q$ 1 0 ——— P 1	$P \leftrightarrow Q$ 1 1 ——— Q 1	$P \leftrightarrow Q$ 1 1 ——— P 1	$P \leftrightarrow Q$ 0 1 ——— Q 0	$P \leftrightarrow Q$ 1 0 ——— P 0	

بدیهی است که حفظ کردن قواعد فوق آسان نیست و خوش‌بختانه، نیازی به این کار نیز وجود ندارد. مهم درک این قواعد از روی جدول ارزش و به دست آوردن آنها هنگام نیاز است.

به عنوان یک نمونه، روش ارزش‌دهی را برای قیاس وضع مقدم و مغالطه وضع تالی به کار می‌بریم: ابتدا، مقدمات را صادق و نتیجه را کاذب می‌گیریم:

وضع مقدم:	وضع تالی:
$P\to Q$	$P\to Q$
1	1
P	Q
1	1
———	———
Q	P
0	0

چون ارزش P و Q مشخص شده است، ارزش آنها را، در سطر اول، می‌نویسیم:

$P\to Q$	$P\to Q$
1 1 0	0 1 1

در استدلال سمت راست، چون مقدم، صادق و تالی، کاذب است کل شرطی باید کاذب باشد یعنی

$$\begin{array}{ccc} P & \to & Q \\ 1 & \underline{1,0} & 0 \end{array}$$

اما این تناقض است و از این رو، استدلال وضع مقدم، معتبر است.

در استدلال سمت چپ هیچ تناقضی نیست و ارزش‌دهی هم کامل شده است پس استدلال نامعتبر است و مثال نقض آن عبارت است از:

$$\begin{array}{cc} P & Q \\ \hline 1 & 0 \end{array}$$

مثال دیگر:

اول: ⇐	دوم: ⇐	سوم: ⇐	چهارم: ⇐	پنجم: ⇐	ششم: ⇐	هفتم:
$P\to Q$	$P\to Q$	$P\to Q$	$P\to Q$	$P\to Q$	$P\to Q$	استدلال
1	1	1 0	0 1 0	0 1 0	0 1 0	معتبر
$R\to S$	$R\to S$	$R\to S$	$R\to S$	$R\to S$	$R\to S$	است و
1	1	1 0	0 1 0	0 1 0	0 1 0	مثال
$P\vee R$	$P\vee R$	$P\vee R$	$P\vee R$	$P\vee R$	$P \vee R$	نقض
1	1	1	1	0 1 0	0 1,0 0	ندارد
———	———	———	———	———	———	
$Q\vee S$	$Q\vee S$	$Q\vee S$	$Q\vee S$	$Q\vee S$	$Q\vee S$	
0	000	000	000	000	000	

مثال سوم:

اول: ⇐	دوم: ⇐	سوم: ⇐	چهارم: ⇐	پنجم:
$P\leftrightarrow Q$ 1 $Q\rightarrow R$ 1 R 1 —— P 0	$P\leftrightarrow Q$ 0 1 $Q\rightarrow R$ 1 1 R 1 —— P 0	$P\leftrightarrow Q$ 0 1 0 $Q\rightarrow R$ 1 1 R 1 —— P 0	$P\leftrightarrow Q$ 0 1 0 $Q\rightarrow R$ 0 1 1 R 1 —— P 0	استدلال نامعتبر است و مثال نقض دارد: PQR —— 0 0 1

تمرین

۱. قواعد زیر در منطق قدیم شناخته شده بودند. آنها را با روش ارزش‌دهی اثبات کنید:

قیاس استثنایی

قیاس استثنایی متصل				قیاس استثنایی منفصل			
رفع مقدم	وضع تالی	رفع تالی	وضع مقدم	حذف	مانع خلو	حذف	مانع جمع
$P\leftarrow Q$ $\sim P$ —— $\sim Q$	$P\leftarrow Q$ Q —— P	$P\rightarrow Q$ $\sim Q$ —— P	$P\rightarrow Q$ P —— Q	$P\vee Q$ $\sim Q$ —— P	$P\vee Q$ $\sim P$ —— Q	$P\uparrow Q$ Q —— $\sim P$	$P\uparrow Q$ P —— $\sim Q$
				حذف دوفصلی			
$P\leftrightarrow Q$ $\sim P$ —— P	$P\leftrightarrow Q$ Q —— P	$P\leftrightarrow Q$ $\sim Q$ —— P	$P\leftrightarrow Q$ P —— Q	$P\updownarrow Q$ $\sim Q$ —— P	$P\updownarrow Q$ $\sim P$ —— Q	$P\updownarrow Q$ Q —— $\sim P$	$P\updownarrow Q$ P —— $\sim Q$

قیاس اقترانی یا تعدی شرطی

قیاس مقسم	قیاس مرکب موصول	قیاس مرکب مفصول	شکل اول	شکل دوم	شکل سوم	شکل چهارم
$P\vee Q\vee R\vee S$ $P\rightarrow T$ $Q\rightarrow T$ $R\rightarrow T$ $S\rightarrow T$ —— T	$P\rightarrow Q$ $R\rightarrow S$ $Q\rightarrow R$ $S\rightarrow T$ —— —— $P\rightarrow R$ $R\rightarrow T$ ———— $P\rightarrow T$	$P\rightarrow Q$ $Q\rightarrow R$ $R\rightarrow S$ $S\rightarrow T$ —— $P\rightarrow T$	$P\rightarrow Q$ $Q\rightarrow R$ —— $P\rightarrow R$	$P\leftrightarrow Q$ $R\leftrightarrow Q$ —— $P\leftrightarrow R$	$P\leftrightarrow Q$ $P\leftrightarrow R$ —— $Q\leftrightarrow R$	$P\leftrightarrow Q$ $R\leftrightarrow P$ —— $Q\leftrightarrow R$

۲. مغالطات زیر در منطق قدیم شناخته شده بودند. نادرستی و عدم اعتبار آنها را اثبات کنید:

				رفع مقدم	وضع تالی		
$P\uparrow Q$ P ——— Q	$P\uparrow Q$ Q ——— P	$P\vee Q$ P ——— Q	$P\vee Q$ Q ——— P	$P\to Q$ $\sim P$ ——— $\sim Q$	$P\to Q$ Q ——— P	$P\leftarrow Q$ Q ——— $\sim P$	$P\leftarrow Q$ $\sim P$ ——— Q
$P\updownarrow Q$ P ——— Q	$P\updownarrow Q$ Q ——— P	$P\updownarrow Q$ $\sim P$ ——— $\sim Q$	$P\updownarrow Q$ $\sim Q$ ——— $\sim P$	$P\leftrightarrow Q$ P ——— $\sim Q$	$P\leftrightarrow Q$ Q ——— $\sim P$	$P\leftrightarrow Q$ $\sim Q$ ——— $\sim P$	$P\leftrightarrow Q$ $\sim P$ ——— $\sim P$

۳. قواعد زیر را منطق جدید کشف کرده است. درستی آن‌ها را ثابت کنید:

خلو	معرفی مانع	مثبت	پارادوکس	K'
P ——— $P\vee Q$	Q ——— $P\vee Q$	P ——— $P\leftarrow Q$	Q ——— $P\to Q$	P ——— $Q\to Q$
جمع	**معرفی مانع**	**منفی**	**پارادوکس**	**EFQ**
$\sim P$ ——— $P\uparrow Q$	$\sim Q$ ——— $P\uparrow Q$	$\sim P$ ——— $P\to Q$	$\sim Q$ ——— $P\leftarrow Q$	P $\sim P$ ——— Q

معرفی نقض مضاعف	معرفی عاطف	معرفی نیا	معرفی آرین	معرفی ناری
P ——— $\sim\sim P$	P Q ——— $P\wedge Q$	$\sim P$ $\sim Q$ ——— $P\downarrow Q$	P $\sim Q$ ——— $P>Q$	$\sim P$ Q ——— $P<Q$
حذف نقض مضاعف	**حذف عاطف**	**حذف نیا**	**حذف آرین**	**حذف ناری**
$\sim\sim P$ ——— P	$P\wedge Q$ ——— P Q	$P\downarrow Q$ ——— $\sim P$ $\sim Q$	$P>Q$ ——— P $\sim Q$	$P<Q$ ——— $\sim P$ Q

شرطی و مانع جمع:	شرطی و مانع خلو:	شرطی و دوفصلی:	قیاس ذوحدین:	فصل دو مقدم:	عطف دو تالی:
$P\to Q$ $P\uparrow Q$ ═══ $\sim P$	$P\to Q$ $P\vee Q$ ═══ Q	$P\to Q$ $P\updownarrow Q$ ═══ $\sim P\wedge Q$	$P\to Q$ $R\to S$ ——— $(P\vee R)\to(Q\vee S)$	$P\to Q$ $R\to Q$ ═══ $(P\vee R)\to Q$	$P\to Q$ $P\to R$ ═══ $P\to(Q\wedge R)$
$\sim P$ ——— $P\to Q$ $P\to\sim Q$ $P\uparrow Q$	P ——— $Q\to P$ $\sim P\to Q$ $P\vee Q$	وضع دو مقدم: $(P\to Q)\wedge(R\to S)$ ——— $(P\wedge R)\to(Q\wedge S)$	قیاس ذوحدین: $(P\to Q)\wedge(R\to S)$ ——— $(P\vee R)\to(Q\vee S)$	فصل دو مقدم: $(P\to Q)\wedge(R\to Q)$ ═══ $(P\vee R)\to Q$	عطف دو تالی: $(P\to Q)\wedge(P\to R)$ ═══ $P\to(Q\wedge R)$

رفع تالی در تالی:

$$\begin{array}{l} P\to(Q\to R) \\ P\to \sim R \\ \hline P\to \sim Q \end{array}$$

وضع مقدم در تالی:

$$\begin{array}{l} P\to(Q\to R) \\ P\to Q \\ \hline P\to R \end{array}$$

صدور:

$$\begin{array}{c} P\to(Q\to R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\to R \end{array}$$

پخش‌پذیری:

$$\begin{array}{c} P\wedge(Q\vee R) \\ \hline (P\wedge Q)\vee(P\wedge R) \end{array}$$

پخش‌پذیری:

$$\begin{array}{c} (P\vee Q)\wedge(P\vee R) \\ \hline P\vee(Q\wedge R) \end{array}$$

۴. اعتبار استدلال‌های زیر را اثبات کنید:

1. $$\begin{array}{l} P \\ \hline (P\to Q)\to(P\leftrightarrow Q) \end{array}$$

2. $$\begin{array}{l} (P\to Q)\to P \\ \hline P \end{array}$$

3. $$\begin{array}{l} P\to(R>Q) \\ \hline P\to(Q\to R) \end{array}$$

4. $$\begin{array}{l} (P\vee Q)\vee(R\wedge S) \\ (P>S)\wedge(P<Q) \\ \hline P<R \end{array}$$

5. $$\begin{array}{l} P\to(Q\to R) \\ \hline Q\to(P\to R) \end{array}$$

6. $$\begin{array}{l} (P\to Q)\to R \\ \hline\hline (P>Q)\vee R \end{array}$$

7. $$\begin{array}{l} (P\to\sim Q)\to R \\ Q\to\sim P \\ \hline R \end{array}$$

8. $$\begin{array}{l} (P\wedge Q)\to(P\to(R\wedge S)) \\ (P\wedge Q)\wedge M \\ \hline R\vee S \end{array}$$

9. $$\begin{array}{l} P \\ Q\to(R\to(P\to S)) \\ \hline R\to(Q\to S) \end{array}$$

10. $$\begin{array}{l} P\to Q \\ (P\wedge Q)\to R \\ P\uparrow R \\ \hline \sim P \end{array}$$

11. $$\begin{array}{l} P\to Q \\ R\to S \\ Q\uparrow S \\ \hline P\uparrow R \end{array}$$

12. $$\begin{array}{l} P\to(R\to S) \\ \sim Q\to\sim S \\ \hline (P\to R)\to(P\to Q) \end{array}$$

13. $$\begin{array}{l} (P\vee Q)\to(R\to S) \\ (\sim S\vee F)\to(P\wedge R) \\ \hline S \end{array}$$

14. $$\begin{array}{l} P\vee(Q\wedge R) \\ P\to R \\ \hline R \end{array}$$

15. $$\begin{array}{l} P\to(Q\to R) \\ Q\to(R\to S) \\ \hline P\to(Q\to S) \end{array}$$

16. $$\begin{array}{l} \sim S\to(Q>R) \\ (P\wedge Q)\to R \\ \hline P\to S \end{array}$$

17. $$\begin{array}{l} (P\to Q)\wedge(R\to S) \\ W\to(P\vee R) \\ \hline W\to(Q\vee S) \end{array}$$

18. $$\begin{array}{l} (P\vee Q)\to(R\wedge S) \\ \sim R \\ \hline \sim Q \end{array}$$

19. $$\begin{array}{l} P\to Q \\ Q\to((R\to\sim\sim R)\to S) \\ \hline P\to S \end{array}$$

20. $$\begin{array}{l} (P\to Q)\wedge(R\to S) \\ P\vee(R\wedge S) \\ \hline S \end{array}$$

21. $$\begin{array}{l} \sim P\vee((Q\to R)\wedge(S\to R)) \\ P\wedge(Q\vee S) \\ \hline R \end{array}$$

22. $$\begin{array}{l} (P\vee Q)\to(R\to S) \\ \sim P\to(W\to\sim W) \\ \sim R \\ \hline \sim W \end{array}$$

23. $$\begin{array}{l} P\to(Q\to R) \\ P\uparrow R \\ (S\to P)\wedge(X\to Q) \\ \hline S\to\sim X \end{array}$$

24. $$\begin{array}{l} P\to(Q\wedge\sim R) \\ (Q\vee R)\to S \\ P \\ \hline S \end{array}$$

25. $$\begin{array}{l} (P\to Q)\wedge(R\to S) \\ (Q\vee S)\to V \\ \sim N \\ \hline \sim(P\vee R) \end{array}$$

26. $$\begin{array}{l} (P\vee Q)\to(R\to S) \\ (R\vee K)\to(\sim L\wedge W) \\ (L\vee M)\to(P\wedge Z) \\ \hline \sim L \end{array}$$

27. $$\begin{array}{l} P\to(Q>R) \\ (S\wedge Q)\to R \\ S \\ \hline \sim P \end{array}$$

28. $$\begin{array}{l} P\to Q \\ S\to\sim R \\ \sim(P\wedge Q) \\ P\vee(\sim\sim R\wedge\sim\sim Q) \\ \hline S\uparrow Q \end{array}$$

29. $$\begin{array}{l} P\to(Q\to R) \\ P\to(S\to I) \\ P\wedge(Q\vee S) \\ \sim R \\ \hline I \end{array}$$

30. $$\begin{array}{l} P\leftrightarrow Q \\ M\to Q \\ (R\vee S)\to(N\wedge M) \\ R \\ \hline P \end{array}$$

نقص روش ارزش‌دهی

روش ارزش‌دهی، با بیان پیشین، یک نقص و کاستی مهم دارد. این کاستی را در بیان قواعد ۲ و ۳ می‌توان مشاهده کرد:

۳. اگر به تناقض برسیم معنایش این است که فرض ما نادرست بوده و استدلال معتبر است؛
۴. اگر همه فرمول‌ها، بدون تناقض، ارزش‌دهی شوند استدلال نامعتبر است؛

در اینجا، دو حالت از سه حالت بررسی شده است: الف: به تناقض برسیم، ب: به تناقض نرسیم و همه فرمول‌ها ارزش‌دهی شوند و ج: به تناقض نرسیم و همه فرمول‌ها را نتوان ارزش‌دهی کرد. حکمِ حالت‌های الف و ب را قاعده‌های ۳ و ۴ بیان کرده‌اند اما برای حالت ج، قاعده‌ای بیان نشده است و ما ناگزیریم قاعده‌ای برای آن معرفی کنیم. پیش از بیان قاعده مربوط به حالت ج، ابتدا، نمونه‌ای برای این حالت ذکر می‌کنیم. استدلال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ Q\rightarrow P \\ \hline P\leftrightarrow Q \end{array}$$

با صادق در نظر گرفتن مقدمات و کاذب گرفتن نتیجه این استدلال، به وضعیت زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ 1 \\ Q\rightarrow P \\ 1 \\ \hline P\leftrightarrow Q \\ 0 \end{array}$$

در این وضعیت، هیچ یک از داده‌های استدلال نمی‌تواند ارزش فرمول‌های فاقد ارزش را تعیین کند و هیچ تناقضی نیز دیده نمی‌شود. ما به وضعیت ج رسیده‌ایم: به تناقض نرسیده‌ایم و همه فرمول‌ها را نیز نمی‌توانیم ارزش‌دهی کنیم. بناچار، قاعده‌ای برای این حالت و حالت‌های مشابه بیان می‌کنیم:

قاعده بازنویسی:

۶. اگر به تناقض نرسیم و همه فرمول‌ها را نیز نتوان ارزش‌دهی کرد
۶-۱. استدلال و همه ارزش‌های موجود در آن را بازنویسی کرده، آن را «نسخه دوم» می‌نامیم و

۶-۲. یکی از فرمول‌های فاقد ارزش را، به دلخواه، انتخاب می‌کنیم و

۶-۳. آن فرمول را در نسخه اول، صادق و در نسخه دوم، کاذب می‌گیریم و

۶-۴. قواعد ارزش‌دهی را برای هر دو نسخه اعمال می‌کنیم؛

بنا به قاعده ۶-۴،

الف: اگر هر دو نسخه به تناقض برسد استدلال معتبر است؛

ب: اگر در یکی یا هر دو نسخه، همه فرمول‌ها، بدون تناقض، ارزش‌دهی شوند استدلال نامعتبر است؛

ج: اگر در یکی از دو نسخه، به تناقض نرسیم و همه فرمول‌ها را نیز نتوان ارزش‌دهی کرد قاعده ۶ را بر آن اعمال می‌کنیم.

در مثال بالا، P را انتخاب کرده، استدلال را بازنویسی می‌کنیم و P را در یک نسخه، صادق و در نسخه دیگر، کاذب می‌گیریم:

P→Q	P→Q
1 1	0 1
Q→P	Q→P
1	1
——	——
P↔Q	P↔Q
0	0

اکنون قواعد را در هر دو نسخه به کار می‌بریم و به نمودار زیر می‌رسیم:

P→Q	P→Q
1 1 1	0 1 0
Q→P	Q→P
1 1 1	0 1 0
——	——
P↔Q	P↔Q
1 10 1	0 10 0

چون در هر دو نسخه، به تناقض رسیدیم، استدلال معتبر است. اکنون استدلال دیگری را بیازماییم:

مثال دوم:

$$\begin{array}{c} P\to Q \\ Q\to P \\ \hline P\wedge Q \end{array}$$

با صادق در نظر گرفتن مقدمات و کاذب گرفتن نتیجه این استدلال، به وضعیت زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{c} P\to Q \\ 1 \\ Q\to P \\ 1 \\ \hline P\wedge Q \\ 0 \end{array}$$

در این مثال، P را انتخاب کرده، استدلال را بازنویسی می‌کنیم و P را در یک نسخه، صادق و در نسخه دیگر، کاذب می‌گیریم:

$$\begin{array}{c} P\to Q \\ 1\;1 \\ Q\to P \\ 1 \\ \hline P\wedge Q \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\to Q \\ 0\;1 \\ Q\to P \\ 1 \\ \hline P\wedge Q \\ 0 \end{array}$$

اکنون قواعد را در هر دو نسخه به کار می‌بریم و به نمودار زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{c} P\to Q \\ 1\;1\;1 \\ Q\to P \\ 1\;1\;1 \\ \hline P\wedge Q \\ 1\;10\;1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\to Q \\ 0\;1\;0 \\ Q\to P \\ 0\;1\;0 \\ \hline P\wedge Q \\ 0\;0\;0 \end{array}$$

چون در یک نسخه، به تناقض نرسیدیم و همه فرمول‌ها ارزش‌دهی نشدند، استدلال نامعتبر است. آشکار است که اگر این وضعیت در هر دو نسخه برقرار شود استدلال نامعتبر است. اکنون استدلالی را بیازماییم که در آن، دو بار قاعده بازنویسی به کار برود:

مثال سوم:

$$\frac{P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)}{(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R}$$

با صادق در نظر گرفتن مقدمات و کاذب گرفتن نتیجه این استدلال، به وضعیت زیر می‌رسیم:

$$\frac{\underset{1}{P\leftrightarrow}(Q\leftrightarrow R)}{(P\leftrightarrow Q)\underset{1\quad 0}{\leftrightarrow} R}$$

در این مثال، P را انتخاب کرده، استدلال را بازنویسی می‌کنیم و P را در یک نسخه، صادق و در نسخه دیگر، کاذب می‌گیریم:

P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)
1 1	0 1
———	———
(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R
1 0	1 0

اکنون قواعد را در هر دو نسخه به کار می‌بریم و به نمودار زیر می‌رسیم:

P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)
1 1 1	0 1 0
———	———
(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R
1 0	1 0

از آنجا که ارزش فرمول‌ها را نمی‌توان تعیین کرد ناچاریم قاعده ۶ را در هر دو نسخه به کار ببریم. در اینجا، Q را انتخاب کرده، استدلال را بازنویسی می‌کنیم و Q را در یک نسخه، صادق و در نسخه دیگر، کاذب می‌گیریم:

نسخه ۱-۱	نسخه۱-۲	نسخه ۲-۱	نسخه ۲-۲
P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)
1 1 1 1	1 1 0 1	0 1 1 0	0 1 0 0
———	———	———	———
(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R
1 1 0	1 0 0	1 1 0	1 0 0

اکنون قواعد را در هر چهار نسخه به کار می‌بریم و به نمودار زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ 11\ \ 111 \\ \hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ 1\ 1\ 1\ 01\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ 11\ \ 010 \\ \hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ 1\ 0\ 0\ 01\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ 01\ \ 100 \\ \hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ 1\ 1\ 1\ 01\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ 01\ 0\ 0\ 1 \\ \hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ 1\ 1\ 0\ 01\ 1 \end{array}$$

چون در همه نسخه‌ها، به تناقض رسیدیم، استدلال معتبر است. خوانندهٔ آشنا با نظام‌های منطقی به روش استنتاج طبیعی یا نموداری را دعوت می‌کنیم تا استدلال بالا را در آن نظام‌ها ثابت کرده، سرعت خیره کنندهٔ روش ارزش‌دهی را خود مشاهده کند.

تمـریـن:

۵. اعتبار استدلال‌های زیر را اثبات کنید:

1. $\begin{array}{c} P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(Q\to P) \end{array}$

2. $\begin{array}{c} P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline (P\wedge Q)\vee(\sim P\wedge\sim Q) \end{array}$

3. $\begin{array}{c} P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline (P\wedge Q)\vee(P\downarrow Q) \end{array}$

4. $\begin{array}{c} P\to Q \\ Q\to P \\ \hline\hline P\leftrightarrow Q \end{array}$

5. $\begin{array}{c} P\updownarrow Q \\ \hline\hline (P\vee Q)\wedge(Q\uparrow P) \end{array}$

6. $\begin{array}{c} P\updownarrow Q \\ \hline\hline (P\wedge\sim Q)\vee(\sim P\wedge Q) \end{array}$

7. $\begin{array}{c} P\updownarrow Q \\ \hline\hline (P>Q)\vee(P<Q) \end{array}$

8. $\begin{array}{c} P\vee Q \\ Q\uparrow P \\ \hline\hline P\updownarrow Q \end{array}$

9. $\begin{array}{c} P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline P\updownarrow\sim Q \\ \hline\hline \sim P\updownarrow Q \\ \hline\hline \sim(P\updownarrow Q) \end{array}$

10. $\begin{array}{c} P\updownarrow Q \\ \hline\hline P\leftrightarrow\sim Q \\ \hline\hline \sim P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline \sim(P\leftrightarrow Q) \end{array}$

11. $\begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ \hline\hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ \hline\hline (P\updownarrow Q)\updownarrow R \\ \hline\hline P\updownarrow(Q\updownarrow R) \end{array}$

12. $\begin{array}{c} P\wedge(Q\wedge R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\wedge R \end{array}$ $\quad\begin{array}{c} (P\vee Q)\vee R \\ \hline\hline P\vee(Q\vee R) \end{array}$

13. $\begin{array}{c} P\vee(Q\wedge R) \\ \hline\hline (P\vee Q)\wedge(P\vee R) \end{array}$

14. $\begin{array}{c} P\wedge(Q\vee R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\vee(P\wedge R) \end{array}$

15. $\begin{array}{c} P\to Q \\ \hline\hline P\to(P\wedge Q) \end{array}$

16. $\begin{array}{c} (P\uparrow Q)\to R \\ \hline\hline (P\vee R)\wedge(Q\vee R) \end{array}$

17. $\begin{array}{c} P\to(Q\wedge R) \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(P\to R) \end{array}$

18. $\begin{array}{c} (P\vee Q)\to R \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(Q\to R) \end{array}$

19. $\begin{array}{c} P\to(Q\vee R) \\ \hline\hline (P\to Q)\vee(P\to R) \end{array}$

20. $\begin{array}{c} (P\wedge Q)\to R \\ \hline\hline (P\to Q)\vee(Q\to R) \end{array}$

21. $\begin{array}{c} P\vee(Q\to P) \\ Q\vee(P\to Q) \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(Q\to P) \end{array}$

22. $\begin{array}{c} (P\vee Q)\to R \\ S\to(T\wedge U) \\ \hline (P\to Q)\wedge(S\to T) \end{array}$

23. $\begin{array}{c} P\wedge(Q\vee R) \\ (P\wedge R)\to(S\downarrow T) \\ (S\uparrow T)\to(P\uparrow Q) \\ \hline S\leftrightarrow T \end{array}$

24.

۶. کدام یک از استدلال‌های زیر نامعتبر است؟ برای آن‌ها مثال نقض ارائه کنید:

1. $\begin{array}{c} P\to Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$

2. $\begin{array}{c} P\vee Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$

3. $\begin{array}{c} P\updownarrow Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$

4. $\begin{array}{c} P\wedge Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$

5. $\begin{array}{c} (P\wedge Q)\to R \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(Q\to R) \end{array}$

6. $\begin{array}{c} (P\vee Q)\to R \\ \hline\hline (P\to Q)\vee(Q\to R) \end{array}$

7. $\begin{array}{c} P\to(Q\to R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\to R \end{array}$

8. $\begin{array}{c} P\uparrow (Q\uparrow R) \\ \hline\hline P\to(Q\wedge R) \end{array}$

9. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ P\updownarrow R \\ \hline Q\vee S \end{array}$

10. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ P\updownarrow R \\ \hline Q\uparrow S \end{array}$

11. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ P\updownarrow R \\ \hline Q\updownarrow S \end{array}$

12. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ P\updownarrow R \\ \hline Q\wedge S \end{array}$

13. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ Q\updownarrow R \\ \hline P\vee R \end{array}$

14. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ Q\updownarrow R \\ \hline P\uparrow R \end{array}$

15. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ Q\updownarrow R \\ \hline P\updownarrow S \end{array}$

16. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ Q\updownarrow R \\ \hline P\wedge S \end{array}$

17. $\begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ \hline\hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \end{array}$

18. $\begin{array}{c} (P\to Q)\to R \\ \hline\hline P\to (Q\to R) \end{array}$

19. $\begin{array}{c} P\uparrow (Q\uparrow R) \\ \hline\hline (P\uparrow Q)\uparrow R \end{array}$

20. $\begin{array}{c} (P\updownarrow Q)\updownarrow R \\ \hline\hline P\updownarrow (Q\updownarrow R) \end{array}$

21. $\begin{array}{c} P\wedge(Q\wedge R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\wedge R \end{array}$

22. $\begin{array}{c} (P\wedge Q)\vee R \\ \hline\hline P\wedge (Q\vee R) \end{array}$

23. $\begin{array}{c} P\wedge(Q\vee R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\vee R \end{array}$

24. $\begin{array}{c} (P\vee Q)\vee R \\ \hline\hline P\vee (Q\vee R) \end{array}$

25. $\begin{array}{c} \sim(P\wedge Q) \\ \hline \sim P\wedge\sim Q \end{array}$

26. $\begin{array}{c} \sim(P\wedge Q) \\ \hline \sim P\vee\sim Q \end{array}$

27. $\begin{array}{c} \sim(P\vee Q) \\ \hline \sim P\wedge\sim Q \end{array}$

28. $\begin{array}{c} \sim(P\vee Q) \\ \hline \sim P\vee\sim Q \end{array}$

روش نموداری

روش نموداری یکی از روش‌های سمانتیکی برای «تعیین اعتبار استدلال» است که بدون استناد به هرگونه ارزشی، اعتبار یا عدم اعتبار استدلال را به دست می‌دهد. این روش هرچند به کوتاهی روش ارزش‌دهی نیست، اما سادگی قواعد آن بسیار مشهود است. در این روش، چهار مجموعه قاعده داریم: قواعد تناقض، قواعد تبدیل، قواعد شاخه‌سازی و قاعده برهان خلف. با سه قاعده اول فرمول‌های مرکب را ساده می‌کنیم تا به فرمول‌هایی برسیم که یک یا دو حرفی هستند. این فرمول‌ها عبارتند متغیرهای جمله‌ای و نقیض آنها. با این تجزیه کردن فرمول‌ها وجود تناقض را به آسانی می‌توان کشف کرد.

تعاریف:

فرمول
- اتمی: فرمول‌های یک حرفی (= متغیرهای گزاره‌ای) مانند P، Q، R و S،
- فرمول مولکولی: فرمول‌های دو یا چند حرفی مانند P~، P∧Q، R→(P∧Q)،

فرمول
- فرمول ساده: فرمول‌های یک یا دو حرفی مانند P، P~ و Q و Q~، (فرمول‌های اتمی و نقیض آنها،)
- فرمول مرکب: فرمول‌های بیش از دو حرف مانند P~~، P∧Q، P∧Q~، R→(P∧Q)

قواعد تناقض:

نقیض هر فرمول هم‌ارز است با همان فرمول که به ادات اصلی آن، یک خط تیره افزوده یا از آن کم شده است. برای نمونه، نقیض ∧ برابر است با ↑ که یک خط تیره عمودی به آن افزوده شده است و نقیض < برابر است با → که یک خط تیره افقی به آن افزوده شده است. همچنین، نقیض ↑ و →، به ترتیب، برابر است با ∧ و < که یک خط تیره از آن کاسته شده است. در زیر، این تناقض‌ها را نشان داده‌ایم:

$$\frac{\sim(P\wedge Q)}{P\uparrow Q}\quad \frac{\sim(P\vee Q)}{P\downarrow Q}\quad \frac{\sim(P>Q)}{P\rightarrow Q}\quad \frac{\sim(P<Q)}{P\leftarrow Q}\quad \frac{\sim(P\updownarrow Q)}{P\leftrightarrow Q}\qquad \frac{\sim\sim P}{P}$$

$$\frac{\sim(P\uparrow Q)}{P\wedge Q}\quad \frac{\sim(P\uparrow Q)}{P\vee Q}\quad \frac{\sim(P\rightarrow Q)}{P>Q}\quad \frac{\sim(P\leftarrow Q)}{P<Q}\quad \frac{\sim(P\leftrightarrow Q)}{P\updownarrow Q}$$

قواعد تبدیل:

هر یک از فرمول‌های دوگانه زیر هم‌ارزند (هم‌ارزی آنها را با جدول ارزش بیازمایید.) در این هم‌ارزی‌ها، فرمول‌های عطفی را به ترکیب عطفی ساده و فرمول‌های فصلی و شرطی را به ترکیب مانع خلو تبدیل کرده‌ایم. تبدیل فرمول‌های فصلی و شرطی در منطق قدیم با عنوان «تلازم شرطیات» شناخته شده بود. این تبدیلات را در زیر گرد آورده‌ایم:

عطفی‌ها:

$P<Q$	$P>Q$	$P\downarrow Q$
$\sim P\wedge Q$	$P\wedge\sim Q$	$\sim P\wedge\sim Q$

فصلی‌ها:

$P\leftarrow Q$	$P\rightarrow Q$	$P\uparrow Q$
$P\vee\sim Q$	$\sim P\vee Q$	$\sim P\vee\sim Q$

قواعد شاخه‌سازی:

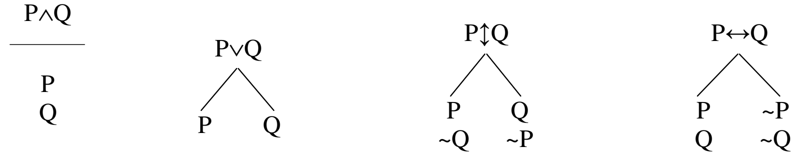
اکنون که همه فرمول‌ها، به جز دوشرطی و دوفصلی، را به ترکیب‌های عطفی و فصلیِ مانع خلو تبدیل کرده‌ایم، احتمالات صدق آنها را در شاخه‌های جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱. ترکیب عطفی تنها در یک سطر جدول ارزش صادق است یعنی سطری که هم مقدم آن صادق است و هم تالی آن. از این رو، برای ترکیب عطفی، تنها یک شاخه پدید می‌آید که اجزای آن جداگانه در آن شاخه نوشته می‌شود.

۲. هر یک از ترکیب دو شرطی و دو فصلی در دو سطر جدول ارزش صادق هستند. برای نمونه، ترکیب دوشرطی وقتی صادق است که دو جزء هر دو صادق یا هر دو کاذب باشند. این دو احتمال را در نمودار مربوطه با دو شاخه بیان کرده‌ایم.

۳. ترکیب مانع خلو، در سه سطر از جدول ارزش صادق است و بنابراین، سه احتمال در صدق آن است و باید سه شاخه برای ترسیم شود که در یکی، مقدم و تالی هر دو صادق هستند و در دیگری، مقدم صادق و تالی کاذب و در سومی، مقدم کاذب و تالی صادق است. این سه احتمال را می‌توان در دو احتمال خلاصه کرد: الف: مقدم صادق است و ب: این که تالی صادق است. احتمال الف شامل دو احتمال اول از سه احتمال سابق است و احتمال ب شامل احتمال اول و سوم از آن سه است.

چکیده این احتمالات و شاخه‌سازی‌ها را در زیر آورده‌ایم:



غالبا شاخه‌ها را به صورت مایل رسم می‌کنند. در این کتاب، برای تسهیل در تایپ، شاخه‌ها را افقی به صورت زیر می‌کشیم:

P∧Q	P∨Q		P↔Q		P↕Q	
P	P	Q	P	~P	P	Q
Q			Q	~Q	~Q	~P

قواعد برهان خلف:

۱. فرض می‌کنیم که استدلال نامعتبر است یعنی مقدمات و نقیض نتیجه
۲. بنابراین، مقدمات و نقیض نتیجه را، زیر هم به صورت عمودی، می‌نویسیم، (تا ببینیم آیا می‌توانند باهم صادق باشند یا نه)،
۳. قواعد بالا را بر فرمول‌های مرکب اعمال می‌کنیم و در هر بار که قاعده روی فرمولی به کار رفت با یک نشان آن را کنار می‌گذاریم. اگر چندین شاخه به وجود آمده باشد نتیجه قاعده را زیر همه شاخه‌ها تکرار می‌کنیم.
۴. اگر همه شاخه‌ها به تناقض بینجامد فرض نادرست و استدلال معتبر است،
۵. و اگر دست کم در یک شاخه، همه فرمول‌های مرکب، ساده شوند و تناقضی پدید نیاید استدلال نامعتبر است،
۶. در این صورت، مجموعه فرمول‌های ساده در آن شاخه را می‌توان مثال نقضی برای استدلال مورد نظر دانست.

مثال:

P→Q
Q→R
———
P→R

*	1	P→Q	مقدمات
*	2	Q→R	
*	3	~(P→R)	و نقیض نتیجه
*	4	P>R	از ۳
*	5	P∧~R	از ۴
	6	P	از ۵
	7	~R	از ۵
*	8	~P∨Q	از ۱
*	9	~Q∨R	از ۲

10 ~P	11 Q		از ۸
۶ و ۱۰	12 ~Q	13 R	از ۹
	۱۱ و ۱۲	۷ و ۱۳	

در برهان بالا، چنان که دیده می‌شود،

۱. ابتدا مقدمات ونقیض نتیجه را نوشته‌ایم.
۲. سطر ۳ با قاعده تناقض به سطر چهار تبدیل می‌شود.
۳. در این مرحله، یک نماد ستاره * کنار سطر ۳ می‌گذاریم تا معلوم شود ساده شده است و دیگر نیاز نیست مجددا ساده شود.
۴. سطر ۵ از سطر چهار با قاعده تبدیل به دست آمده است و ستاره سطر چهار نشان این مرحله است.
۵. سطر ۶ و ۷ با قاعده شاخه‌سازی از سطر ۵ به دست آمده است و ستاره سطر پنجم نشان این مرحله است.
۶. اکنون، قاعده تبدیل را بر سطر ۱ و ۲ به کار می‌بریم و برای آنها ستاره می‌گذاریم. حاصل کار دو سطر جدید ۸ و ۹ است.
۷. و اینک، قاعده شاخه‌سازی را بر سطر ۸ به کار می‌بریم و برای آن ستاره می‌گذاریم. حاصل کار دو شاخه جدید ۱۰ و ۱۱ است.
۸. شاخه ۱ تا ۱۰ شامل یک تناقض است: P و P~ که در سطرهای ۶ و ۱۰ قرار دارند. این شاخه را به دلیل این تناقض، دیگر ادامه نمی‌دهیم.
۹. در شاخه ۱ تا ۹ و ۱۱، تاکنون هیچ تناقضی رخ نداده است. از این رو، به روی سطر ۹ که بدون ستاره است قاعده شاخه‌سازی را به کار برده، برای آن ستاره گذاشته و دو شاخه جدید ۱۲ و ۱۳ را از آن می‌سازیم.

۱۰. در شاخه ۱ تا ۹ و ۱۱ و ۱۲، تناقضِ Q و Q~ در سطرهای ۱۱ و ۱۲ وجود دارد.
۱۱. در شاخه ۱ تا ۹ و ۱۱ و ۱۳، تناقضِ R و R~ در سطرهای ۷ و ۱۳ وجود دارد.
۱۲. بنابراین، هیچ راهی برای صادق بودن فرض اول نمی‌ماند و ناگزیر استدلال معتبر است.

مثال دوم:

$P\rightarrow Q$
$Q\rightarrow R$
―――
$P\wedge R$

*1 $P\rightarrow Q$
*2 $Q\rightarrow R$
*3 $\sim(P\wedge R)$
*4 $P\uparrow R$ — از ۳
*5 $\sim P\vee\sim R$ — از ۴
*6 $\sim P\vee Q$ — از ۱
*7 $\sim Q\vee R$ — از ۲

$\sim P$				$\sim R$				از ۵
$\sim P$		Q		$\sim P$		Q		از ۶
$\sim Q$	R	$\sim Q$	R	$\sim Q$	R	$\sim Q$	R	از ۷
1	2	#	4	5	#	#	#	

در برهان بالا،

۱. وقتی به سطر ۷ می‌رسیم سطرهای ۱ تا ۴ ستاره گرفته‌اند و سطرهای ۵ تا ۷ بدون ستاره‌اند.
۲. سطر ۵ را با ستاره نشان کرده، دو شاخه جدید می‌سازیم.
۳. سطر ۶ را با ستاره نشان کرده، برای هر یک از دو شاخه موجود، دو شاخه جدید می‌سازیم.
۴. تاکنون به تناقض نرسیده‌ایم. از این رو، سطر ۷ را نیز با ستاره نشان کرده، برای هر یک از چهار شاخه موجود، دو شاخه جدید می‌سازیم.
۵. اکنون هشت شاخه داریم که در نیمی از آنها، تناقض وجود دارد. این شاخه‌ها را با # نشان داده‌ایم.
۶. چهار شاخه باقی مانده نه دارای دو فرمول متناقض هستند و نه دارای فرمول مرکبی که بتوان آنها را ساده کرد.
۷. بنابراین، استدلال نامعتبر است و از هر کدام از این شاخه‌های باز (= بدون تناقض) می‌توان مثال نقض به دست آورد:
۸. مثال‌های نقض را از شاخه‌های باز به روش زیر به دست می‌آید:

1	2	4	5
~P~Q	~PR	~PQR	~P~Q~R
PQ	PR	PQR	PQR
0 0	0 1	0 1 1	0 0 0

۹. هر کدام از شاخه‌های ۴ و ۵ سطری از جدول ارزش را نشان می‌دهند که در آن، مقدمات استدلال بالا صادق و نتیجه آن کاذب است.
۱۰. اما، شاخه‌های ۱ و ۲ که همه حروف آن ارزش‌دهی نشده است بیش از یک سطر جدول ارزش را نشان می‌دهند. برای تعیین این سطرها، به این روش عمل می‌کنیم که حرف فاقد ارزش را یک بار صادق و یک بار کاذب می‌گیریم:

1		2	
~P~Q		~PR	
PQ		PR	
0 0		0 1	
PQR	PQR	PQR	PQR
0 0 1	0 0 0	0 1 1	0 0 1
1-1	1-2	2-1	2-2

۱۱. چنان که مشاهده می‌شود ارزش‌دهی‌های ۱–۲ و ۲–۱ همان شاخه‌های ۵ و ۴ هستند و ۱–۱ برابر ۲–۲ است.

۱۲. بنابراین، در مجموع سه مثال نقض برای استدلال بالا وجود دارد که متناظر با سه سطر از جدول ارزش است.

				PQR
4	=	2-1	=	0 1 1
1-1	=	2-2	=	0 0 1
5	=	1-2	=	0 0 0

برای اطمینان از صحت این گفته، جدول ارزش را رسم می‌کنیم و نتایج بالا را مشاهده می‌کنیم:

			مقدمه	مقدمه	نتیجه
P	Q	R	$P\rightarrow Q$	$Q\rightarrow R$	$P\wedge R$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

روش نموداری، در مقایسه با روش ارزش‌دهی، بسیار طولانی است. برای نمونه، برهان استدلال از $P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)$ به $(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R$ را در دو روش نموداری و ارزش‌دهی مقایسه کنید.

نکته‌ها:

۱. برای سرعت بخشیدن به روند برهان و کاستن از تعداد مراحل و شاخه‌ها، بهتر است قواعدی که درخت را دوشاخه می‌کنند پس از قواعد تک‌شاخه ساز به کار روند. از این رو، فرمول‌های عطفی را ابتدا و سپس فرمول‌های فصلی را تجزیه کنید.

۲. در صورت به دست آوردن مهارت کافی، بهتر است قواعد تبدیل را ذهنی انجام دهید و مستقیما به شاخه‌سازی بپردازید:

قواعد سریع شاخه‌سازی:

عطفی‌ها:

$P\wedge Q$	$P\downarrow Q$	$P>Q$	$P<Q$
P Q	$\sim P$ $\sim Q$	P $\sim Q$	Q $\sim P$

فصلی‌ها:

$P\vee Q$	$P\uparrow Q$	$P\updownarrow Q$
P Q	$\sim P$ $\sim Q$	P Q $\sim Q$ $\sim P$

شرطی‌ها:

$P\rightarrow Q$	$P\leftarrow Q$	$P\leftrightarrow Q$
$\sim P$ Q	P $\sim Q$	P $\sim P$ Q $\sim Q$

۳. حتی می‌توان از قواعد تناقض نیز چشم پوشید و مستقیما به اجزا رسید:

قواعد شاخه‌سازی از نقیض‌ها:

$\sim(P\wedge Q)$	$\sim(P\vee Q)$	$\sim(P\rightarrow Q)$	$\sim(P\leftarrow Q)$	$\sim(P\leftrightarrow Q)$	$\sim\sim P$
$\sim P$ $\sim Q$	$\sim P$ $\sim Q$	P $\sim Q$	$\sim P$ Q	P Q $\sim Q$ $\sim P$	P

$\sim(P\uparrow Q)$	$\sim(P\downarrow Q)$	$\sim(P>Q)$	$\sim(P<Q)$	$\sim(P\updownarrow Q)$
P Q	P Q	$\sim P$ Q	P $\sim Q$	P $\sim P$ Q $\sim Q$

تمـریـن: اعتبار و عدم اعتبار استدلال‌های تمرین ارزش‌دهی را به روش نموداری تعیین کنید.

روش استنتاج طبیعی

یادداشت تاریخی

روش ارزش‌دهی را ای. جی. هیوز و ام. جی. کرسوِل ۱۹۹۶ در منطق موجهات معرفی کرده‌اند و نگارنده آن را، با تغییرات لازم، برای منطق گزاره‌ها و سورها به کار برده است. روش‌های نموداری که در اساس، شبیه این روش هستند و برهان خلف را به کار می‌گیرند، به جای ارزش‌های 1 و 0، فرمول‌های عطفیِ مقدمه و نقیض نتیجه را تجزیه و فرمول‌های فصلی را دوشاخه کرده و در صورت یافتن تناقض در همه شاخه‌ها، استدلال را نامعتبر اعلام می‌کنند. کندی و تعداد مراحل کار در روش نموداری، به طرز کاملا محسوسی، بیشتر از روش ارزش‌دهی است. در ایران، روش نموداری را ضیاء موحد ۱۳۶۸ و لطف اله نبوی ۱۳۷۷ و پیش از آن‌ها، ویلفرید هاجز به ترجمه عبدالحسین آذرنگ به نام «راهی نو در منطق» در سال ۱۳۶۴ و ریچارد جفری به ترجمه پرویز پیر به نام «قلمرو و مرزهای منطق صوری» در سال ۱۳۶۷معرفی کرده‌اند.

روش ارزش‌دهی، مانند روش نموداری، روشی مکانیکی است و با مراحلی متناهی به پایان می‌رسد و از این جهت، نیروی ابتکار و خلاقیت ذهن را به کار نمی‌گیرد. این دو روش برای مبتدیان و نیز برای علاقه‌مندان به «منطق ریاضی» و برنامه‌نویسان رایانه‌ای مطلوب است اما برای علاقه‌مندان به «منطق فلسفی»، کاری کسل‌کننده و بی‌روح به نظر می‌رسد. از این رو، منطق‌دانان، روش‌های دیگری به نام «روش استنتاج طبیعی» را ابداع کرده‌اند که شباهت بسیاری به عملکرد ذهن دارد و از این رو، در کتاب‌های منطق فلسفی، بیشترین توجه به آنها معطوف شده است.

پرکاربردترین این روش‌ها از آنِ ای. جی. لمون از انگلیس ۱۹۵۶، فردریک فیچ از امریکا ۱۹۵۲ و گرهارد گنتزن از آلمان ۱۹۳۴ است. به دلیل همین پراکندگی جغرافیایی پدیدآورندگان این روش‌ها است که این سه روش، به ترتیب، در انگلستان، امریکا و اروپای قاره‌ای محبوبیت یافته‌اند. این سه روش را در ایران، به ترتیب ضیاء موحد ۱۳۶۸، لطف اله نبوی ۱۳۷۷ و محمد اردشیر ۱۳۸۳ به کار برده‌اند. ما ترکیبی از روش اول و دوم را در فصل بعد خواهیم آورد.

گنتزن ۱۹۳۴ روش دیگری را نیز ابداع کرده است که «حساب رشته‌ها» نامیده می‌شود و نباید با روش استنتاج طبیعی گنتزن اشتباه گرفته شود. اردشیر ۱۳۸۳ حساب رشته‌ها را نیز به جامعه فارسی زبانان معرفی کرده است.

روش استنتاج	سمانتیکی	جدول ارزش	لودویک ویتگنشتاین	ماتریسی	بسیار طولانی و کند	مکانیکی
		نموداری	ریچارد جفری و ویلفرید هاجز	ترتیب درختی	کوتاه و سریع	مکانیکی
		ارزش‌دهی	ای. جی. هیوز و ام. جی. کرسوِل	ترتیب درختی	بسیار کوتاه و سریع	
	برهانی	استنتاج طبیعی	ای. جی. لمون	ترتیب خطی و شماره فرض‌ها	آسان	نیازمند اندیشه و خلاقیت و غیر مکانیکی
			فردریک فیچ	ترتیب خطی و برهانک‌ها	نسبتا آسان	
			گرهارد گنتزن	ترتیب درختی و برهانک‌ها	بسیار آسان	
		حساب رشته‌ها	گرهارد گنتزن	ترتیب درختی و برهانک‌ها	پیچیده	
		منطق نمایش	نوئل بلنپ	ترتیب درختی و برهانک‌ها	بسیار پیچیده	
		اصل موضوعی	اقلیدس و هیلبرت اسپینوزا فرگه، راسل، وایتهد و بسیاری دیگر	در هندسه در علم اخلاق در منطق جدید	بسیار پیچیده	

روش برهانک (سبک فیچ)

برهانک بخشی از برهان است که نقش برهان کمکی را بر عهده دارد. گاهی پیش می‌آید که بخشی از برهان اصلی خود نیازمند برهان است و باید برای آن برهان اقامه نمود. این برهان فرعی را در علم منطق، «برهانک» و در ریاضیات، «لم» می‌نامند. در ریاضیات، لم‌ها را جدای از برهان اصلی ذکر می‌کنند اما در منطق، برهانک را درون برهان اصلی می‌آورند و فرعی بودن آن را با شماره‌فرض‌ها، فرورفتگی، مستطیل، یک خط عمودی، یک خط عمودی و یک خط افقی یا این دو به همراه پیکان نشان می‌دهند. ما برای این کار از دو خط افقی و یک خط عمودی استفاده می‌کنیم. بهترین مثال برای برهانک، برهان خلف و دلیل شرطی است.

در برهان خلف، برای اثبات نتیجه، نقیض آن را فرض کرده، از دل آن، یک تناقض بیرون می‌کشند. این روش‌ها را در زیر برای قاعده برهان خلف به نمایش گذاشته‌ایم:

یک خط

| $\sim P$
|
| $Q\wedge\sim Q$
$\therefore$ P

دو خط

| $\sim P$
|―――
| $Q\wedge\sim Q$
$\therefore$ P

سه خط

$\sim P$

$Q\wedge\sim Q$
$\therefore$ P

مستطیل

$\boxed{\sim P \quad Q\wedge\sim Q}$
$\therefore$ P

پیکان

$\sim P$

$Q\wedge\sim Q$
$\therefore$ P

فرورفتگی

$\sim P$

$Q\wedge\sim Q$
$\therefore$ P

شماره‌فرض

m	$\sim P$
i, j, m	$Q\wedge\sim Q$
$\therefore$ i, j	P

در دلیل شرطی، وقتی از یک فرض، نتایجی را به دست می‌آوریم، چکیده این استنتاج را در یک گزاره شرطی به صورت افقی می‌نویسیم.روش‌های مذکور را برای دلیل شرطی می‌آوریم:

یک خط

| P
|
| Q
$\therefore$ $P\rightarrow Q$

دو خط

| P
|―――
| Q
$\therefore$ $P\rightarrow Q$

سه خط

P

Q
$\therefore$ $P\rightarrow Q$

مستطیل

$\boxed{P \quad Q}$
$\therefore$ $P\rightarrow Q$

پیکان	فرورفتگی	شماره‌فرض	
$\sim P$	P	m	P
Q	Q	i, j, m	Q
$\therefore\ P\rightarrow Q$	$\therefore\ P\rightarrow Q$	$\therefore\ i, j$	$P\rightarrow Q$

در برهانک‌ها، سطر اول همواره یک فرض کمکی است. فرض را پیش از پایان برهانک، «فرض باز» و پس از آن، «فرض بسته» می‌نامند. همچنین، برهانک را پس از پایان، «برهانک محذوف» یا «برهانک مختوم» می‌نامند زیرا دیگر نمی‌توان قواعد را بر فرمول‌های آن اعمال کرد و این به منزله حذف آن است. بر این اساس، درون برهانک، قواعد را تنها بر فرمول‌های آن برهانک و فرمول‌های پیشین که در دامنه فرضهای بسته نیستند می‌توان اعمال کرد. برهانک می‌تواند تک سطر باشد که در این صورت، سطر اول و آخر یکی خواهند بود.

برای فرض‌ها و برهانک‌ها، می‌توان قواعد معرفی و حذف را بیان کرد:

۱. معرفی فرض: در هر سطر برهان، هر فرمول دلخواه را می‌توان فرض کرد.
۲. حذف فرض: برهانک را در هر سطر دلخواه می‌توان به پایان برد و یکی از قواعد مربوط به برهانک را بر آن به کار برد. (با این کار، کل برهانک را نابود شده می‌پنداریم و هیچ قاعده‌ای را بر فرمول‌های آن به کار نمی‌بندیم.)

مقدمه‌ها همگی «فرض باز» هستند و بر خلاف فرض‌های کمکی، نباید بسته شوند. از این روست که برای مقدمه‌ها، خطوط برهانک ترسیم نمی‌شود.

در روش برهانک، مانند سایر روش‌ها، ساده‌ترین قاعده‌ها مربوط به گزاره‌های عطفی است و به همین دلیل این قواعد را ابتدا ذکر می‌کنیم. قواعد عطفی فاقد هر گونه برهانک است و راز سادگی آن نیز در همین امر نهفته است:

۱. قواعد عطفی‌ها:

	ناری:	آرین:	نیا:	عاطف:
معرفی:	$\dfrac{\begin{array}{c}\sim P\\ Q\end{array}}{P<Q}$	$\dfrac{\begin{array}{c}P\\ \sim Q\end{array}}{P>Q}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\sim P\\ \sim Q\end{array}}{P\downarrow Q}$	$\dfrac{\begin{array}{c}P\\ Q\end{array}}{P\wedge Q}$
حذف:	$\dfrac{P<Q}{\begin{array}{c}\sim P\\ Q\end{array}}$	$\dfrac{P>Q}{\begin{array}{c}P\\ \sim Q\end{array}}$	$\dfrac{P\downarrow Q}{\begin{array}{c}\sim P\\ \sim Q\end{array}}$	$\dfrac{P\wedge Q}{\begin{array}{c}P\\ Q\end{array}}$

۱. متعدد بودن مقدمات به این معناست که هر دو مقدمه برای نتیجه‌گیری مورد نیاز هستند. برای نمونه، برای به دست آوردن $P\wedge Q$، نیازمند P و Q هستیم و اگر این دو جزء در سطرهایی از برهان باشند می‌توان ترکیب $P\wedge Q$ را نتیجه گرفت. در این صورت، شماره سطرهای P و Q را، به عنوان توضیح، در برابر $P\wedge Q$ می‌نویسیم.

۲. متعدد بودن نتایج در قواعد حذف، در اینجا، به معنای این است که هر یک از دو نتیجه را می‌توان به دست آورد.[6] برای مثال، از $P\wedge Q$، هم می‌توان P را به دست آورد هم Q را. در هر صورت، شماره $P\wedge Q$ را، برای یادآوری و توضیح، در برابر جزءهای به دست آمده می‌نویسیم.

۲. قواعد ناقض:

قواعد ناقض بر دو قسم است: یکی برهان خلف و دیگری قاعده (نفی در نفی = اثبات)

معرفی نقض مضاعف	حذف نقض مضاعف	برهان خلف (معرفی ناقض)	برهان خلف (حذف ناقض)
$\dfrac{P}{\sim\sim P}$	$\dfrac{\sim\sim P}{P}$	$\begin{array}{l}\lvert\; P\\ \lvert\; \vdots\\ \lvert\; Q\wedge\sim Q\\ \hline \therefore\ \sim P\end{array}$	$\begin{array}{l}\lvert\; \sim P\\ \lvert\; \vdots\\ \lvert\; Q\wedge\sim Q\\ \hline \therefore\ P\end{array}$

توضیحات:

[6] در برخی کتاب‌ها، تعدد نتایج به معنای ناسازگاری صدق همه مقدمات با کذب همه نتایج است. ما، در این کتاب، این معنا را به دلیل دور بودن از ذهن، قصد نمی‌کنیم.

۱. دو قاعده نقض مضاعف عکس یکدیگر و تک‌مقدمه‌ای هستند. هر دو قاعده تک‌مقدمه‌ای را که عکس یکدیگر باشند می‌توان به صورت یک قاعده دو طرفه نوشت. برای نمونه، دو قاعده نقض مضاعف را به صورت زیر می‌نویسیم:

نقض مضاعف

$$\frac{P}{\sim\sim P}$$

۲. دو قاعده معرفی و حذف ناقض دو صورت قاعده برهان خلف هستند. بنا به این قاعده، فرضی که به تناقض بینجامد باطل است و نقیض آن صادق است. بنابراین، اگر فرض P به تناقض بینجامد P~ نتیجه می‌شود و اگر فرض P~ به تناقض بینجامد P نتیجه می‌شود.

۳. مجموعه فرمول‌هایی را که از فرض شروع شده و به تناقض منتهی می‌شوند (به عبارت دیگر، مجموعه فرمول‌های داخل پاره‌خط‌ها را) «برهانک» می‌نامند.

۳. قواعد شرطی:

معرفی $\rightarrow$	دلیل شرطی قیاس افتراض	حذف $\rightarrow$ قیاس استثنایی
$\dfrac{Q}{P\rightarrow Q}$ $\dfrac{\sim P}{P\rightarrow Q}$	$\begin{array}{l} \quad P \\ \quad Q \\ \therefore\ P\rightarrow Q \end{array}$	رفع تالی: $\dfrac{P\rightarrow Q \quad \sim Q}{\sim P}$ وضع مقدم: $\dfrac{P\rightarrow Q \quad P}{Q}$

توضیحات:

۱. دو قاعده معرفی $\rightarrow$ بنا به جدول ارزش معتبرند.

۲. قیاس افتراض، که خود نوعی معرفی $\rightarrow$ است، عکس قیاس استثناییِ وضع مقدم است که در منطق مگاری- رواقی شناخته شده بوده است. قیاس افتراض، در اینجا، می‌گوید برای اثبات $P\rightarrow Q$ ، می‌توان از فرض P به Q رسید.

۴. قواعد شرطی معکوس:

معرفی ←		قیاس افتراض	حذف ←	
			قیاس استثنایی	
			رفع تالی	وضع مقدم
P	~Q	Q	P←Q	P←Q
		P	~P	Q
P←Q	P←Q	∴ P←Q	~Q	P

توضیحات:

۱. دو قاعده معرفی ← بنا به جدول ارزش معتبرند.

۲. قیاس افتراض، که خود نوعی معرفی ← است، عکس قیاس استثناییِ وضع مقدم است که در منطق مگاری- رواقی شناخته شده بوده است. قیاس افتراض، در اینجا، می‌گوید برای اثبات P←Q ، می‌توان از فرض Q به P رسید.

۵. قواعد دوشرطی:

معرفی ↔		دلیل شرطی قیاس افتراض		حذف ↔			
		P	فرض	قیاس استثنایی			
		Q		رفع تالی	رفع مقدم	وضع تالی	وضع مقدم
P	~P	Q	فرض	P↔Q	P↔Q	P↔Q	P↔Q
Q	~Q	P		~Q	~P	Q	P
P↔Q	P↔Q	∴ P↔Q	دلیل شرطی	~P	~Q	P	Q

توضیحات:

۱. دو قاعده معرفی ↔ بنا به جدول ارزش معتبرند.

۲. قیاس افتراض، که خود نوعی معرفی ↔ است، عکس قیاس استثنایی است که در منطق مگاری- رواقی شناخته شده بوده است. قیاس افتراض، در اینجا، می‌گوید برای اثبات P↔Q ، می‌توان از فرض P به Q رسید و برعکس.

۶. قواعد مانع خلو:

معرفی ∨

$$\frac{P}{P\vee Q} \qquad \frac{Q}{P\vee Q}$$

قیاس افتراض

| ~Q
| P
$\therefore$ $P\vee Q$

قیاس افتراض

| ~P
| Q
$\therefore$ $P\vee Q$

قیاس استثنایی

$$\frac{P\vee Q \quad \sim P}{Q} \qquad \frac{P\vee Q \quad \sim Q}{P}$$

حذف ∨

$P\vee Q$
| P
| R

| Q
| R
$\therefore$ R

توضیحات:

۱. دو قاعده معرفی ∨ بنا به جدول ارزش معتبرند.

۲. قیاس افتراض، که خود نوعی معرفی ∨ است، عکس قیاس استثنایی است که در منطق مگاری- رواقی شناخته شده بوده است. قیاس افتراض، در اینجا، می‌گوید برای اثبات $P\vee Q$ ، می‌توان از فرض $\sim P$ به Q رسید.

۳. قاعده حذف ∨ می‌گوید که اگر همه اقسام، مستلزم یک نتیجه باشند آن نتیجه نمی‌تواند کاذب باشد.

۷. قواعد مانع جمع:

معرفی ↑

$$\frac{\sim P}{P\uparrow Q} \qquad \frac{\sim Q}{P\uparrow Q}$$

قیاس افتراض

| Q
| ~P
$\therefore$ $P\uparrow Q$

قیاس افتراض

| P
| ~Q
$\therefore$ $P\uparrow Q$

قیاس استثنایی

$$\frac{P\uparrow Q \quad P}{\sim Q} \qquad \frac{P\uparrow Q \quad Q}{\sim P}$$

حذف ↑

$P\uparrow Q$
| R
| P

| R
| Q
$\therefore$ ~R

توضیحات:

۱. دو قاعده معرفی ↑ بنا به جدول ارزش معتبرند.

۲. قیاس افتراض، که خود نوعی معرفی ↑ است، عکس قیاس استثنایی است که در منطق مگاری- رواقی شناخته شده بوده است. قیاس افتراض، در اینجا، می‌گوید برای اثبات P↑Q ، می‌توان از فرض P به ~Q رسید.

۳. قاعده حذف ↑ می‌گوید که گزاره‌ای که مستلزم دو ضد است نمی‌تواند صادق باشد.

۸. قواعد دوفصلی:

قیاس افتراض

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} P \\ \sim Q \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sim Q \\ P \end{array}\right. \\ \hline \therefore\ P \updownarrow Q \end{array}$$

قیاس افتراض

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} P \\ \sim Q \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \sim P \\ Q \end{array}\right. \\ \hline \therefore\ P \updownarrow Q \end{array}$$

حذف ↕

$$\begin{array}{l} P \updownarrow Q \\ \left[\begin{array}{l} R \\ P \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} R \\ Q \end{array}\right. \\ \hline \therefore\ \sim R \end{array}$$

حذف ↕

$$\begin{array}{l} P \updownarrow Q \\ \left[\begin{array}{l} P \\ R \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} Q \\ R \end{array}\right. \\ \hline \therefore\ R \end{array}$$

معرفی ↕

$$\frac{P \quad \sim Q}{P \updownarrow Q} \qquad \frac{Q \quad \sim P}{P \updownarrow Q}$$

معرفی ↕

$$\frac{P \quad \sim Q}{P \updownarrow Q} \qquad \frac{Q \quad \sim P}{P \updownarrow Q}$$

قیاس استثنایی

$$\frac{P \updownarrow Q \quad \sim P}{Q} \qquad \frac{P \updownarrow Q \quad \sim Q}{P}$$

قیاس استثنایی

$$\frac{P \updownarrow Q \quad \sim P}{Q} \qquad \frac{P \updownarrow Q \quad \sim Q}{P}$$

توضیحات:

۱. دو قاعده معرفی ↕ بنا به جدول ارزش معتبرند.

۲. قیاس افتراض، که خود نوعی معرفی ↕ است، عکس قیاس استثنایی است که در منطق مگاری- رواقی شناخته شده بوده است. قیاس افتراض، در اینجا، می‌گوید برای اثبات P↕Q ، می‌توان از فرض ~P به Q رسید.

۳. قاعده اول حذف ↕ می‌گوید که اگر همه اقسام مستلزم یک نتیجه باشند آن نتیجه نمی‌تواند کاذب باشد و قاعده دوم حذف ↕ می‌گوید که گزاره‌ای که مستلزم دو نقیض است نمی‌تواند صادق باشد.

قیاس‌های استثنایی را برای هر ادات جداگانه ذکر کردیم. بد نیست مجددا این قیاس‌ها را با هم ذکر کنیم:

قیاس استثنایی

متصل				منفصل			
Modus Tollendo Tollens رفع تالی		Modus Ponendo Ponens وضع مقدم		Modus Tollendo Ponens حذف مانع خلو		Modus Ponendo Tolens حذف مانع جمع	
$P\leftarrow Q$ $\sim P$ ——— $\sim Q$	$P\to Q$ $\sim Q$ ——— $\sim P$	$P\leftarrow Q$ Q ——— P	$P\to Q$ P ——— Q	$P\vee Q$ $\sim Q$ ——— P	$P\vee Q$ $\sim P$ ——— Q	$P\uparrow Q$ Q ——— $\sim P$	$P\uparrow Q$ P ——— $\sim Q$

قیاس استثنایی

دوشرطی				دوفصلی			
$P\leftrightarrow Q$ $\sim P$ ——— $\sim Q$	$P\leftrightarrow Q$ $\sim Q$ ——— $\sim P$	$P\leftrightarrow Q$ Q ——— P	$P\leftrightarrow Q$ P ——— Q	$P\updownarrow Q$ $\sim Q$ ——— P	$P\updownarrow Q$ $\sim P$ ——— Q	$P\updownarrow Q$ Q ——— $\sim P$	$P\updownarrow Q$ P ——— $\sim Q$

قواعد فرعی:

قیاس اقترانی یا تعدی شرطی

قیاس مقسم	قیاس مرکب موصول	قیاس مرکب مفصول	شکل اول	شکل دوم	شکل سوم	شکل چهارم
$P\vee Q\vee R\vee S$ $P\to T$ $Q\to T$ $R\to T$ $S\to T$ ——— T	$R\to S$ $P\to Q$ $S\to T$ $Q\to R$ ——— ——— $R\to T$ $P\to R$ —————— $P\to T$	$P\to Q$ $Q\to R$ $R\to S$ $S\to T$ ——— $P\to T$	$P\to Q$ $Q\to R$ ——— $P\to R$	$P\leftrightarrow Q$ $R\leftrightarrow Q$ ——— $P\leftrightarrow R$	$P\leftrightarrow Q$ $P\leftrightarrow R$ ——— $Q\leftrightarrow R$	$P\leftrightarrow Q$ $R\leftrightarrow P$ ——— $Q\leftrightarrow R$

استدلال‌های نادرست منطق قدیم

الـف: قـاعده تـداخل

بر اساس این قاعده، از گزاره کلی، می‌توان گزاره جزیی را نتیجه گرفت. برای نمونه، گزاره «هر الف ب است» نتیجه می‌دهد: «بعضی الف ب است». همچنین، از «هیچ الف ب نیست» می‌توان به «بعضی الف ب نیست» رسید.

در منطق جدید، این قاعده مورد مناقشه قرار گرفته است زیرا در این منطق، در تحلیل گزاره‌های کلی و جزیی، به ترتیب، ادات‌های شرطی و عاطف را وارد می‌کنند و می‌دانیم که از ترکیب شرطی نمی‌توان ترکیب عطفی را نتیجه گرفت.

در پاسخ، گفته می‌شود که موضوع، در گزاره موجبه، باید موجود باشد. دلیل این سخن آن است که اثبات چیزی بر چیزی فرع وجود آن چیز است (قاعده فرعیه). بنابراین، «هر الف ب است» معادل است با «الف موجود است و هر چیز اگر الف باشد ب است». از آنجا که «الف موجود است» معادل است با «بعضی چیزها الف هستند»، پس «هر الف ب است» معادل است با «بعضی چیزها الف هستند و هر چیز اگر الف باشد ب است» که در منطق جدید، نتیجه می‌دهد «بعضی چیزها الف و ب هستند».

این پاسخ پذیرفتنی نیست زیرا تنها می‌تواند استنتاج موجبه کلی به موجبه جزیی را تبیین کند و از تبیین استنتاج سالبه کلی به سالبه جزیی عاجز است.

مجددا، در پاسخ، گفته می‌شود که موضوع، در گزاره سالبه، می‌تواند معدوم باشد. بنابراین، «برخی الف ب نیست» معادل است با «الف معدوم است یا بعضی چیزها الف هستند و ب نیستند». از آنجا که «الف معدوم است» معادل است با «هیچ چیز الف نیست»، پس «بعضی الف ب نیست» معادل است با «هیچ چیز الف نیست یا بعضی چیزها الف هستند و ب نیستند» که در منطق جدید، از «هیچ الف ب نیست» نتیجه می‌شود.

بر اساس این پاسخ، تحلیل گزاره‌های سوردار چنین است:

	و به طور ساده:	پیشنهاد ما:	پیشنهاد فرگه:
هر الف ب است	$\exists xAx \wedge \forall x(Ax \supset Bx)$	$\exists xAx \wedge \forall x(Ax \supset Bx)$	$\forall x(Ax \supset Bx)$
بعضی الف ب است	$\exists x(Ax \wedge Bx)$	$\exists xAx \wedge \exists x(Ax \wedge Bx)$	$\exists x(Ax \wedge Bx)$
هیچ الف ب نیست	$\exists x(Ax \wedge \sim Bx)$	$\forall x\sim Ax \vee \exists x(Ax \wedge \sim Bx)$	$\exists x(Ax \wedge \sim Bx)$
بعضی الف ب نیست	$\forall x\sim Ax \vee \exists x(Ax \wedge \sim Bx)$	$\forall x\sim Ax \vee \exists x(Ax \wedge \sim Bx)$	$\exists x(Ax \wedge \sim Bx)$

توجه کنید که در پیشنهاد ما، قوانین تناقض به استحکام خود باقی هستند و نقض نمی‌شوند. در برخی پاسخ‌ها، فرض می‌شود که تحلیل کلی به شرطی یا تحلیل جزیی به عطفی نادرست است و باید یا هر دو به شرطی یا هر دو به عطفی تحلیل شوند. علت نادرست بودن چنین پاسخ‌هایی در این است که اصل تناقض، بر اساس این دو نوع پاسخ، نقض می‌شود. زیرا دو گزاره عطفی یا دو گزاره شرطی نمی‌توانند نقیض هم باشند.

این پاسخ این امتیاز را دارد که بر اساس آن، عکس مستوی از کلی به جزیی و برخی از ضروب شکل سوم و چهارم که از دو کلی به جزیی می‌رسند همگی اعتبار از دست رفتهٔ خود در منطق جدید را بازمی‌یابند.

همچنین، ما بدون اینکه متعهد به فرض سنگین تعهد وجودی برای همه وصف‌های کلی بشویم مسأله را حل کرده‌ایم. در برخی پاسخ‌ها، فرض می‌شود که همه نام‌های کلی مانند «انسان» و «حیوان» دارای مصداق هستند. این فرض کاملا نادرست است زیرا همه می‌دانیم که وصف‌های کلی فاقد مصداق نمونه‌های فراوانی، از قبیل «اسب پرنده» و «مربع دایره»، دارد.

این پاسخ نسبتا قوی، با وجود امتیازات مذکور، در توجیه عکس نقیض موجبه کلی ناکام است: عکس نقیض «هر الف ب است»، بنا به تحلیل قدمای منطق قدیم مانند ابن سینا، برابر است با «هر غیر ب غیر الف است». اما نمی‌توان از صدق اولی به دومی رسید زیرا گزاره دوم ایجابی است و دلالت بر وجود «غیر ب» دارد. اما وجود «غیر ب» از «هر الف ب است» نتیجه نمی‌شود.

متأخرین منطق قدیم مانند کاتبی قزوینی، به دلیل این اعتراض، تعریف عکس نقیض را تغییر داده و تغییر کیفیت گزاره و عدم تغییر در موضوع را پیشنهاد دادند. بر این اساس، عکس نقیض «هر الف ب است»، بنا به تحلیل متأخرین منطق قدیم، برابر است با «هیچ غیر ب الف نیست». هم‌چنین، عکس نقیض «هیچ الف ب نیست»، بنا به این تحلیل، برابر است با «بعضی غیر ب الف است».

تحلیل متأخرین به همان اندازه تحلیل قدما نادرست است زیرا وجود «غیر ب» از «هیچ الف ب نیست» نتیجه نمی‌شود و از این رو استنتاج «بعضی غیر ب الف است» از آن نادرست است.

در پایان، می‌توان این اعتراض را نیز پذیرفت که بسیاری از گزاره‌های موجبه کلی که در علومی مانند فیزیک و شیمی به کار می‌روند تعهد وجودی به موضوع خود ندارند. بر این اساس، قاعده تداخل هرچند در زبان طبیعی معتبر است در زبان علوم نامعتبر است.

همچنین، قاعده فرعیه تنها در گزاره‌های شخصی کاربرد دارد و سرایت آن به گزاره‌های سوردار ناموجه است. وقتی می‌گوییم «هر الف ب است» ب را نه بر مصادیق موجود الف بلکه بر مصادیق فرضی الف اثبات می‌کنیم و این فرع بر وجود آن مصادیق فرضی نمی‌شود.

تذکر این نکته لازم است که در ادبیات منطق، واژه «تعهد وجودی» برای عبارت‌های زبانی گوناگونی به کار می‌رود که دانستن معنای هر یک و تفکیک آن از سایر معانی، مهم است. در نمودار زیر، این معانی را به اختصار ذکر می‌کنیم:

تعهد وجودی به	تعریف	مورد پذیرش	مورد انکار
نام‌ها خاص:	همه نام‌های خاص به موجودات اشاره می‌کنند	منطق کلاسیک	منطق آزاد
نام‌های کلی:	مجموعه مصادیق هر نام کلی ناتهی است	هیچ منطق‌دان!	همه!
موضوع سور:	مجموعه مصادیق سور ایجابی ناتهی است	منطق قدیم	فرگه و منطق کلاسیک
دامنه سور:	دامنه سخن ناتهی است	منطق کلاسیک	کواین و منطق‌های کاملا آزاد
سور:	سورها روی موجودات واقعی تغییر می‌کنند	فعلی‌گرایان	امکان‌گرایان

ب: قاعده بدیهی منطقی یا افزایش

این قاعده در منطق ارسطو و قرون وسطی شناخته شده نبوده است اما در کتاب‌های اخیر منطق قدیم، مانند منطق مظفر، با نام «البديهة المنطقية» ذکر شده است و ما آن را «قاعده افزایش» می‌نامیم. این قاعده می‌گوید کلمات یکسان را می‌توان بر سر موضوع و محمول یک قضیه در آورد بدون اینکه صدق قضیه از بین برود. به دیگر سخن، افزودن کلمات یکسان بر موضوع و محمول، صدق‌نگهدار است. برای نمونه:

۱. موجبه کلی

هر انسان حیوان است

هر پای انسان پای حیوان است (به فرض تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

هر انسان شاعر حیوان شاعر است (به فرض تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

هر انسان حیوان است

هر بزرگتر از بعضی انسان‌ها بزرگتر از بعضی حیوان‌ها است (به فرض تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

۲. موجبه جزیی

بعضی حیوان‌ها انسان هستند

بعضی حیوان‌های پیر انسان پیر هستند (به فرض تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

بعضی مدافعان حقوق حیوانات مدافع حقوق بشر (= انسان) هستند (به فرض تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

۳. سالبه کلی

هیچ گوسفندی سگ نیست

هیچ پای گوسفندی پای سگی نیست

هیچ مجموعه‌ای از گوسفندان مجموعه‌ای از سگ‌ها نیست

هیچ دیواری خانه نیست

هیچ دیوار سنگی خانه سنگی نیست

۴. سالبه جزیی

بعضی حیوان‌ها انسان نیستند

بعضی پای حیوان‌ها پای انسان نیستند (به فرض عدم تعهد وجودی برای موضوع «بعضی» در سالبه)

با این وجود، قاعده افزایش یا بدیهی منطقی، در بسیاری موارد، مغالطه آمیز است و از این رو، نمی‌توان به آن اعتماد کرد. چند نمونه از مثال‌های نقض قاعده افزایش را در زیر می‌بینیم:

۱. موجبه کلی (حتی بدون فرض تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

هر انسان حیوان است

هر بزرگتر از همه انسان‌ها بزرگتر از همه حیوان‌ها است

۲. موجبه جزیی (حتی بدون فرض تعهد وجودی برای موضوع «بعضی» در موجبه)

بعضی حیوان‌ها انسان هستند

بعضی حیوان‌های شاخ‌دار انسان شاخ‌دار هستند

بعضی حیوانهای سنگی انسان سنگی هستند

بعضی بزرگتر از بعضی حیوان‌ها بزرگتر از بعضی انسان‌ها است

بعضی بزرگتر از همه حیوان‌ها بزرگتر از همه انسان‌هاست

۳. سالبه کلی

هیچ گوسفندی سگ نیست	هیچ دیواری خانه نیست
هیچ صاحب گوسفندی صاحب سگ نیست	هیچ جزء دیوار جزء خانه نیست

۴. سالبه جزیی (به فرض عدم تعهد وجودی برای موضوع «بعضی» در سالبه)

بعضی حیوان‌ها انسان نیستند

بعضی حیوان‌های شاعر انسان شاعر نیستند

بعضی بزرگتر از همه حیوان‌ها بزرگتر از همه انسان‌ها انسان‌ها نیستند

بعضی بزرگتر از بعضی حیوان‌ها بزرگتر از بعضی انسان‌ها نیستند

افزون بر نادرستی قاعده افزایش در صورت کلی آن، می‌توان نشان داد که در برخی صورت‌های درست این قاعده، کلمات افزوده شده می‌توانند یکسان نباشند. مثال‌های زیر نمونه‌هایی از صورت‌ها هستند:

۱. موجبه کلی (به فرض تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

هر انسان حیوان است

هر بزرگتر از همه انسان‌ها بزرگتر از بعضی حیوانهاست

۲. موجبه جزیی

بعضی حیوان‌ها انسان هستند

هر بزرگتر از همه حیوان‌ها بزرگتر از بعضی انسان‌هاست (به فرض عدم تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

بعضی بزرگتر از همه حیوان‌ها بزرگتر از بعضی انسان‌هاست (به فرض تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

۳. سالبه کلی

هیچ گوسفندی سگ نیست	هیچ دیواری خانه نیست
؟؟؟	؟؟؟

۴. سالبه جزیی

بعضی حیوان‌ها انسان نیستند

هر بزرگتر از همه حیوان‌ها بزرگتر از بعضی غیر انسان‌هاست (به فرض عدم تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

بعضی بزرگتر از همه حیوان‌ها بزرگتر از بعضی غیر انسان‌هاست (به فرض تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

همچنین، می‌توان نشان داد که در برخی صورت‌های درست قاعده افزایش، موضوع و محمول می‌توانند جابجا شوند:

۱. موجبه کلی (به فرض عدم تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

هر انسان حیوان است

هر بزرگتر از همه حیوان‌ها بزرگتر از همه انسان‌ها است

۲. موجبه جزیی (به فرض عدم تعهد وجودی برای موضوع «هر»)

بعضی حیوان‌ها انسان هستند

هر بزرگتر از همه انسان‌ها بزرگتر از بعضی حیوان‌ها است

۳. سالبه کلی

هیچ گوسفندی سگ نیست	هیچ دیواری خانه نیست
؟؟؟	؟؟؟

۴. سالبه جزیی

بعضی حیوان‌ها انسان نیستند

بعضی غیر انسان‌ها غیر حیوان نیستند

اثبات اعتبار و عدم اعتبار موارد مشخص شده در منطق جدید آسان است.

استدلال‌های بحث نشده در منطق قدیم

الف: تبدیل جمله فعلی به اسمی[7]

این قاعده دو شکل دارد:

۱-۱ اسم فاعل سازی: می‌رود = رونده است

۱-۲ موصول سازی : می‌رود = کسی است که می‌رود = کسی که می‌رود است

علی درس می‌خواند	علی پدرش عالم است	انسان ناطق است
علی درسخوان است	علی کسی است که پدرش عالم است	انسان چیزی است که ناطق است

[7] تبدیل جمله فعلیه به اسمیه در منطق قدیم نیاز است و عدم مراعات آن می‌تواند به مغالطه بینجامد:

هر گربه موش می‌خورد
مغالطه: بعضی موش‌ها گربه می‌خورند (عکس مستوی)

هر پیر جوان بوده است
مغالطه: برخی جوانان پیر بوده‌اند

هر گربه موش می‌خورد
هر غیر موش غیر گربه می‌خورد (عکس نقیض)

هر پیر جوان بوده است
هر غیر جوان غیر پیر بوده است

هر گربه موش می‌خورد
صحیح: بعضی موش‌خوارها گربه هستند
بعضی چیزها که موش می‌خورند گربه هستند

هر پیر جوان بوده است
صحیح: بعضی‌ها که جوان بوده‌اند پیر هستند

هر گربه موش می‌خورد
صحیح: هر غیر خورنده موش غیر گربه است
هر چه موش نمی‌خورد غیر گربه است

هر پیر جوان بوده است
صحیح: هرکه جوان نبوده است پیر نیست

مغالطه در شکل اول: دیوار موش دارد
موش گوش دارد
دیوار گوش دارد

صورت صحیح استدلال: دیوار موش دارد
موش گوش دارد
دیوار چیزی دارد که گوش دارد
دیوار گوش‌دار دارد

مغالطه در شکل سوم: بعضی پدرها خانه دارند
هر پدر فرزند دارد
بعضی خانه‌ها فرزند دارند

صورت صحیح استدلال: بعضی پدرها خانه دارند
هر پدر فرزند دارد
بعضی خانه دارها فرزند دارند
بعضی‌ها که خانه دارند فرزند دارند

علی کسی است که درس می‌خواند   علی کسی که پدرش عالم است می‌باشد   انسان چیزی که ناطق است می‌باشد
علی کسی که درس می‌خواند است   علی دارای پدری عالم است

ب: تـغـیـیر مـوضـوع

انتقال بخشی از موضوع یا محمول به ابتدای جمله و قرار دادن ضمیر به جای آن بخش:

۱. سعید برادر سعیده است
سعیده، سعید برادرش است
سعیده کسی است که سعید برادر اوست

۲. سعید از حمید بزرگتر است
حمید کسی است که سعید از او بزرگتر است
حمید از سعید کوچکتر است

۳. برخی سخن‌های مجید راست نیست
مجید برخی سخن‌هایش راست نیست

۴. هر سخن هر پیامبر راست است
هر پیامبر، هر سخنش راست است

۵. بعضی غذاها را هر انسانی می‌تواند بخورد
هر انسانی بعضی غذاها را می‌تواند بخورد[۸]

[8] عکس استدلال (۵) معتبر نیست یعنی اگر سور جزیی مقدم بر سور کلی باشد می‌توان جابجا کرد ولی اگر سور کلی مقدم باشد نمی‌توان:

هر دایی برادر یک مادر است
مغالطه: یکی از مادران ، هر دایی برادرش است

هر عدد فرد کوچکتر از بعضی اعداد زوج است
بعضی اعداد زوج، هر عدد فرد کوچکتر از آنهاست
مغالطه: بعضی اعداد زوج بزرگتر از هر عدد فرد است

۶. برخی کتابهای هر کتابخانه مفید است

هر کتابخانه، برخی کتابهایش مفید است

۷. برخی پسرها فرزند یکی از پدرها هستند

یکی از پدرها ، برخی پسرها فرزندش هستند

۸. بعضی اعداد فرد از هر عدد زوج کوچکتر است

هر عدد زوج، بعضی اعداد فرد از آن کوچکتر است

هر عدد زوج از بعضی اعداد فرد بزرگتر است

ج: نقض محمول پیچیده

۱. مجید کسی است که «برخی » سخنهایش راست نیست

مجید کسی نیست که «همه » سخنهایش راست باشد

۲. «هیچ»کسی «همه» انسان‌ها را دوست ندارد

«هر»کسی «برخی» انسان‌ها را دوست ندارد

۳. حسن «هیچ» مورچه‌ای را نکشته است

حسن کسی نیست که مورچه«ای» را کشته باشد

حسن کسی که «برخی » مورچه‌ها را کشته است نیست

۴. «هیچ» کس «همه» را «همیشه» نمی‌تواند بفریبد

«هر»کس «برخی» را «گاهی» نمی‌تواند بفریبد

د: تناقض بدون وحدت محمول

۱. «هر» که «همه» حنوانات را دوست بدارد «هیچ» مورچه‌ای را نمی‌آزارد

«بعضی»ها که »همه« حیوانات را دوست دارند «برخی» مورچه‌ها را می‌آزارند

دو طرف بودن استدلال (٦) از کژتابی‌های زبان متعارف است نه استثنایی بر قاعده‌ی منطقی فوق زیرا مراد از «برخی کتابهای هر کتابخانه» باید مطابق ظاهر آن «برخی از کتابهایی که در همه کتابخانه‌ها موجود است» باشد ولی بر خلاف ، «هر کتابخانه برخی کتابهایش» اراده شده است.

هـ : تجزیـه

تجزیه محمول:

۱. هر انسان حیوان ناطق است

هر انسان حیوان است

هر انسان ناطق است

۲. بعضی انسان‌ها جوان تحصیلکرده

بعضی[9] انسان‌ها جوان هستند

بعضی انسان‌ها تحصیلکرده هستند

۳. هیچ انسان انسان پرنده نیست

هیچ انسان پرنده نیست

۴. بعضی انسان‌ها انسان عالم نیستند

بعضی انسان‌ها عالم نیستند

تجزیه موضوع:

۱. هر (یا بعضی) حیوان ناطق انسان است

بعضی حیوان‌ها انسان هستند

بعضی ناطق‌ها انسان هستند

۲. هیچ (یا بعضی) انسان پرنده انسان نیست

هیچ پرنده ایمان نیست

---

[9] عکس استدلال (۲) معتبر نیست برای نمونه یک مثال نقض می‌آووریم:

بعضی انسان‌ها کودک هستند

بعضی انسان‌ها پیر هستند

بعضی انسان‌ها کودک پیر هستند

و: تـرکـیـب

۱. هر عدد فرد است

هر عدد عدد فرد است

۲. هر ناطق حیوان است

هر ناطق حیوان ناطق است

۳. هیچ انسان پرنده نیست

هیچ انسان حیوان پرنده نیست

هیچ انسان پرنده شاخدار نیست

هیچ انسان نویسنده‌ای پرنده نیست

هیچ انسان نویسنده‌ای حیوان پرنده نیست

ز: تجزیـه و تـرکـیـب

۱. هر الف، بِج است	هر خفاش، پرندهٔ تخم‌گذار است
هر الفِب، ج است	هر خفاش پرنده، تخم‌گذار است

۲. هیچ الف، بِج نیست	هیچ دانشجویی جوان بی‌سواد نیست
هیچ الفـِب، ج نیست	هیچ دانشجوی جوان بی‌سواد نیست

۳. بعضی الفـهایِ ب، ج هستند	بعضی انسان‌ها جوان تحصیل‌کرده هستند
بعضی الفـها، بـِج هستند	بعضی انسانهای جوان تحصیل‌کرده هستند

۴. بعضی الفـهایِ ب، ج نیستند	بعضی کتاب‌های منطقی، پیچیده نیستند
بعضی الفـها، بـِج نیستند	بعضی کتاب‌ها، منطقی پیچیده نیستند

ح: شرطي‌سازي

۱. هر انسان حیوان است

هر جسم، اگر انسان باشد حیوان است

اگر هر جسم انسان باشد هر جسم حیوان است[10]

[10] عکس شرطی‌سازی معتبر نیست برای نمونه، دو مثال نقض می‌آووریم:

ط: حذف سور کلی

۱. هر مجردی به هر مجردی علم دارد

هر مجردی به خودش علم دارد

ي: تبدیل حد وسط

۱. اگر هر الف ب باشد آنگاه هر الفِ‌بِ، ج است.

اگر هر الف ب باشد آنگاه هر الف ج است.

مثال:

اگر همه انسان‌ها داخل این اتاق شوند هرکه داخل این اتاق باشد می‌میرد

اگر همه انسان‌ها داخل این اتاق شوند همه انسان‌ها می‌میرند

ك: قیاس‌های اقترانی

عدم حذف حد وسط

۱. هر دانشجو جوان است

هر دانشجو باسواد است

هر دانشجو جوان باسواد است

تعدد حد وسط

۱. هر «سخن» پیامبر «راست» است

برخی «سخن»های مجید «راست» نیست

مجید پیامبر نیست

حد وسط، جزء موضوع یا محمول است

۱. هر پدری، همسر یک زنی است

هر زن مؤنث است

هر پدری، همسر یک مؤنثی است

۲. هر پسر، فرزند یک پدر است

هر عدد زوج اگر کوچکتر از ٦ باشد کوچکتر از ٥ است

هر کوچکتر از ٦ کوچکتر از ٥ است

اگر هر انسان مرد باشد هر انسان بی‌فرزند خواهد بود

هر انسان، اگر مرد باشد بی‌فرزند خواهد بود

هر پدر مرد است

هر پسر، فرزند یک مرد است

۳. هر انسان از هر حشره بزرگتر است

هر مورچه حشره است

هر انسان از هر مورچه بزرگتر است

حد اصغر جزء موضوع یا محمول

۱. هر حیوان ناطق، انسان است

هیچ انسان سگ نیست

بعضی حیوان‌ها سگ نیستند

حد اکبر جزء موضوع یا محمول

۱. بعضی حیوان‌ها سگ هستند

هیچ سگی حیوان ناطق نیست

بعضی حیوان‌ها ناطق نیستند

۲. بعضی جسم‌ها انسان هستند

هیچ انسانی حیوان بالدار یا شاخ‌دار نیست

بعضی جسم‌ها حیوان بالدار نیستند

عدم تکرار حدوسط

۱. بعضی مردان، متأهل هستند

هر مرد متأهل، زن دارد

بعضی مردان زن دارند

انواع گزاره‌های حملی

در منطق قدیم، گزاره را به چهار قسم شخصی، طبیعی، مهمل و مسور تقسیم می‌کنند:

گزاره حملی	۱. شخصی:		ماه سیاره است
	۲. طبیعی:		سیاره مفهومی کلی است
	۳. مهمل:		سیاره به گرد ستاره می‌گردد
	۴. مسور (محصورات اربع)	۱. موجب کلی:	هر سیاره به گرد ستاره می‌گردد
		۲.سالب کلی:	هیچ سیاره به گرد ستاره نمی‌گردد
		۳. موجب جزیی:	برخی سیاره‌ها به گرد ستاره می‌گردند
		۴. سالب جزیی:	برخی سیاره‌ها به گرد ستاره نمی‌گردند

تحلیل این اقسام در منطق جدید به صورت زیر است:

گزاره حملی	۱. شخصی:			ماه سیاره است	Sm		
	۲. طبیعی:			سیاره مفهومی کلی است	ΦS		
	۳. مهمل:	ساده:		چیز سیاره است	Sx		
		پیچیده:		سیاره به گرد ستاره می‌گردد	$Sx \supset Gx$	؟؟	$Sx \wedge Gx$
	۴. مسور (محصورات اربع)	ساده	۱. موجب کلی:	هر چیز سیاره است	$\forall xSx$		
			۲.سالب کلی:	هیچ چیز سیاره نیست	$\forall x{\sim}Sx$		
			۳. موجب جزیی:	برخی چیزها سیاره هستند	$\exists xSx$		
			۴. سالب جزیی:	برخی چیزها سیاره نیستند	$\exists x{\sim}Sx$		
		پیچیده	۱. موجب کلی:	هر سیاره به گرد ستاره می‌گردد	$\forall x(Sx \rightarrow Gx)$		$\forall x(Sx \rightarrow Gx)$
			۲.سالب کلی:	هیچ سیاره به گرد ستاره نمی‌گردد	$\forall x(Sx \rightarrow {\sim}Gx)$	یا	$\forall x(Sx \uparrow Gx)$
			۳. موجب جزیی:	برخی سیاره‌ها به گرد ستاره می‌گردند	$\exists x(Sx \wedge Gx)$	یا	$\exists x(Sx \wedge Gx)$
			۴. سالب جزیی:	برخی سیاره‌ها به گرد ستاره نمی‌گردند	$\exists x(Sx \wedge {\sim}Gx)$	یا	$\exists x(Sx > Gx)$

مـنـابـع :

شماره	عنوان	نویسنده	مترجم	ناشر	سال
۱.	راهی نو در منطق	ویلفرید هاجز	عبدالحسین آذرنگ	؟؟	۱۳۶۴
۲.	قلمرو و مرزهای منطق صوری	ریچارد جفری	پرویز پیر	علمی و فرهنگی	۱۳۶۶
۳.	درآمدی به منطق جدید	ضیاء موحد	–	علمی و فرهنگی	۱۳۶۸
۴.	مبانی منطق جدید	لطف اله نبوی	–	سمت	۱۳۷۷
۵.	منطق ریاضی	محمد اردشیر	–	هرمس	۱۳۸۳

6.	Symbolic logic	F. Fitch		Ronald Press (New york)	1952
7.	Beginning Logic	E.J. Lemmon		Nelson (London)	1956
8.	The collected papers,1969 pp.68-131	G. Gentzen	Ed. M. E. Szabo	North Holand Publishing co. (Amsterdam)	1934
9.	'Display Logic'	N. Belnap		*Journa of Philosophical Logic*, 11, pp.375-417	1982
10.	A New Introduction to Modal Logic	G. E. Hughes M. J.Cresswell		Routlage (London& New York)	1996
11.					