روش نموداری

روش نموداری یکی از روش‌های سمانتیکی برای «تعیین اعتبار استدلال» است که بدون استناد به هرگونه ارزشی، اعتبار یا عدم اعتبار استدلال را به دست می‌دهد. این روش هرچند به کوتاهی روش ارزش‌دهی نیست، اما سادگی قواعد آن بسیار مشهود است. در این روش، چهار مجموعه قاعده داریم: قواعد تناقض، قواعد تبدیل، قواعد شاخه‌سازی و قاعده برهان خلف. با سه قاعده اول فرمول‌های مرکب را ساده می‌کنیم تا به فرمول‌هایی برسیم که یک یا دو حرفی هستند. این فرمول‌ها عبارتند متغیرهای جمله‌ای و نقیض آنها. با این تجزیه کردن فرمول‌ها وجود تناقض را به آسانی می‌توان کشف کرد.

تعاریف:

فرمول
- اتمی: فرمول‌های یک حرفی (= متغیرهای گزاره‌ای) مانند P، Q، R و S،
- فرمول مولکولی: فرمول‌های دو یا چند حرفی مانند ~P، P∧Q، (P∧Q)→R،

فرمول
- فرمول ساده: فرمول‌های یک یا دو حرفی مانند P، ~P و Q و ~Q، (فرمول‌های اتمی و نقیض آنها،)
- فرمول مرکب: فرمول‌های بیش از دو حرف مانند ~~P، P∧Q، ~P∧Q، (P∧Q)→R

قواعد تناقض:

نقیض هر فرمول هم‌ارز است با همان فرمول که به ادات اصلی آن، یک خط تیره افزوده یا از آن کم شده است. برای نمونه، نقیض ∧ برابر است با ↑ که یک خط تیره عمودی به آن افزوده شده است و نقیض > برابر است با → که یک خط تیره افقی به آن افزوده شده است. همچنین، نقیض ↑ و →، به ترتیب، برابر است با ∧ و > که یک خط تیره از آن کاسته شده است. در زیر، این تناقض‌ها را نشان داده‌ایم:

$$\frac{\sim(P\wedge Q)}{P\uparrow Q}\quad \frac{\sim(P\vee Q)}{P\downarrow Q}\quad \frac{\sim(P>Q)}{P\rightarrow Q}\quad \frac{\sim(P<Q)}{P\leftarrow Q}\quad \frac{\sim(P\updownarrow Q)}{P\leftrightarrow Q}\qquad \frac{\sim\sim P}{P}$$

$$\frac{\sim(P\uparrow Q)}{P\wedge Q}\quad \frac{\sim(P\uparrow Q)}{P\vee Q}\quad \frac{\sim(P\rightarrow Q)}{P>Q}\quad \frac{\sim(P\leftarrow Q)}{P<Q}\quad \frac{\sim(P\leftrightarrow Q)}{P\updownarrow Q}$$

قواعد تبدیل:

هر یک از فرمول‌های دوگانه زیر هم‌ارزند (هم‌ارزی آنها را با جدول ارزش بیازمایید.) در این هم‌ارزی‌ها، فرمول‌های عطفی را به ترکیب عطفی ساده و فرمول‌های فصلی و شرطی را به ترکیب مانع خلو تبدیل کرده‌ایم. تبدیل فرمول‌های فصلی و شرطی در منطق قدیم با عنوان «تلازم شرطیات» شناخته شده بود. این تبدیلات را در زیر گرد آورده‌ایم:

عطفی‌ها:

$$\frac{P<Q}{\sim P\wedge Q}\qquad \frac{P>Q}{P\wedge\sim Q}\qquad \frac{P\downarrow Q}{\sim P\wedge\sim Q}$$

فصلی‌ها:

$$\frac{P\leftarrow Q}{P\vee\sim Q}\qquad \frac{P\rightarrow Q}{\sim P\vee Q}\qquad \frac{P\uparrow Q}{\sim P\vee\sim Q}$$

قواعد شاخه‌سازی:

اکنون که همه فرمول‌ها، به جز دوشرطی و دوفصلی، را به ترکیب‌های عطفی و فصلیِ مانع خلو تبدیل کرده‌ایم، احتمالات صدق آنها را در شاخه‌های جداگانه بررسی می‌کنیم.

۱. ترکیب عطفی تنها در یک سطر جدول ارزش صادق است یعنی سطری که هم مقدم آن صادق است و هم تالی آن. از این رو، برای ترکیب عطفی، تنها یک شاخه پدید می‌آید که اجزای آن جداگانه در آن شاخه نوشته می‌شود.

۲. هر یک از ترکیب دو شرطی و دو فصلی در دو سطر جدول ارزش صادق هستند. برای نمونه، ترکیب دوشرطی وقتی صادق است که دو جزء هر دو صادق یا هر دو کاذب باشند. این دو احتمال را در نمودار مربوطه با دو شاخه بیان کرده‌ایم.

۳. ترکیب مانع خلو، در سه سطر از جدول ارزش صادق است و بنابراین، سه احتمال در صدق آن است و باید سه شاخه برای ترسیم شود که در یکی، مقدم و تالی هر دو صادق هستند و در دیگری، مقدم صادق و تالی کاذب و در سومی، مقدم کاذب و تالی صادق است. این سه احتمال را می‌توان در دو احتمال خلاصه کرد: الف: مقدم صادق است و ب: این که تالی صادق است. احتمال الف شامل دو احتمال اول از سه احتمال سابق است و احتمال ب شامل احتمال اول و سوم از آن سه است.

چکیده این احتمالات و شاخه‌سازی‌ها را در زیر آورده‌ایم:

غالبا شاخه‌ها را به صورت مایل رسم می‌کنند. در این کتاب، برای تسهیل در تایپ، شاخه‌ها را افقی به صورت زیر می‌کشیم:

$$\frac{P\wedge Q}{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}} \qquad \frac{P\vee Q}{\begin{array}{cc}P & Q\end{array}} \qquad \frac{P\leftrightarrow Q}{\begin{array}{cc}P & \sim P\\ Q & \sim Q\end{array}} \qquad \frac{P\updownarrow Q}{\begin{array}{cc}P & Q\\ \sim Q & \sim P\end{array}}$$

قواعد برهان خلف:

۱. فرض می‌کنیم که استدلال نامعتبر است یعنی مقدمات و نقیض نتیجه
۲. بنابراین، مقدمات و نقیض نتیجه را، زیر هم به صورت عمودی، می‌نویسیم، (تا ببینیم آیا می‌توانند باهم صادق باشند یا نه)،
۳. قواعد بالا را بر فرمول‌های مرکب اعمال می‌کنیم و در هر بار که قاعده روی فرمولی به کار رفت با یک نشان آن را کنار می‌گذاریم. اگر چندین شاخه به وجود آمده باشد نتیجه قاعده را زیر همه شاخه‌ها تکرار می‌کنیم.
۴. اگر همه شاخه‌ها به تناقض بینجامد فرض نادرست و استدلال معتبر است،
۵. و اگر دست کم در یک شاخه، همه فرمول‌های مرکب، ساده شوند و تناقضی پدید نیاید استدلال نامعتبر است،
۶. در این صورت، مجموعه فرمول‌های ساده در آن شاخه را می‌توان مثال نقضی برای استدلال مورد نظر دانست.

مثال:

$$\frac{\begin{array}{l}P\rightarrow Q\\ Q\rightarrow R\end{array}}{P\rightarrow R}$$

مقدمات	*	1	$P\rightarrow Q$
و نقیض نتیجه	*	2	$Q\rightarrow R$
	*	3	$\sim(P\rightarrow R)$
از ۳	*	4	$P>R$
از ۴	*	5	$P\wedge\sim R$
از ۵		6	P
از ۵		7	$\sim R$
از ۱	*	8	$\sim P\vee Q$
از ۲	*	9	$\sim Q\vee R$

از ۸: 10 $\sim P$ | 11 Q

از ۹ (زیر 11): 12 $\sim Q$ | 13 R

۶ و ۱۰ — ۱۱ و ۱۲ — ۷ و ۱۳

در برهان بالا، چنان که دیده می‌شود،

۱. ابتدا مقدمات ونقیض نتیجه را نوشته‌ایم.
۲. سطر ۳ با قاعده تناقض به سطر چهار تبدیل می‌شود.

۳. در این مرحله، یک نماد ستاره * کنار سطر ۳ می‌گذاریم تا معلوم شود ساده شده است و دیگر نیاز نیست مجددا ساده شود.
۴. سطر ۵ از سطر چهار با قاعده تبدیل به دست آمده است و ستاره سطر چهار نشان این مرحله است.
۵. سطر ۶ و ۷ با قاعده شاخه‌سازی از سطر ۵ به دست آمده است و ستاره سطر پنجم نشان این مرحله است.
۶. اکنون، قاعده تبدیل را بر سطر ۱ و ۲ به کار می‌بریم و برای آنها ستاره می‌گذاریم. حاصل کار دو سطر جدید ۸ و ۹ است.
۷. و اینک، قاعده شاخه‌سازی را بر سطر ۸ به کار می‌بریم و برای آن ستاره می‌گذاریم. حاصل کار دو شاخه جدید ۱۰ و ۱۱ است.
۸. شاخه ۱ تا ۱۰ شامل یک تناقض است: P و P~ که در سطرهای ۶ و ۱۰ قرار دارند. این شاخه را به دلیل این تناقض، دیگر ادامه نمی‌دهیم.
۹. در شاخه ۱ تا ۹ و ۱۱، تاکنون هیچ تناقضی رخ نداده است. از این رو، به روی سطر ۹ که بدون ستاره است قاعده شاخه‌سازی را به کار برده، برای آن ستاره گذاشته و دو شاخه جدید ۱۲ و ۱۳ را از آن می‌سازیم.
۱۰. در شاخه ۱ تا ۹ و ۱۱ و ۱۲، تناقضِ Q و Q~ در سطرهای ۱۱ و ۱۲ وجود دارد.
۱۱. در شاخه ۱ تا ۹ و ۱۱ و ۱۳، تناقضِ R و R~ در سطرهای ۷ و ۱۳ وجود دارد.
۱۲. بنابراین، هیچ راهی برای صادق بودن فرض اول نمی‌ماند و ناگزیر استدلال معتبر است.

مثال دوم:

$P \to Q$
$Q \to R$

$P \wedge R$

*1 $P \to Q$
*2 $Q \to R$
*3 $\sim(P \wedge R)$
*4 $P \uparrow R$ — از ۳
*5 $\sim P \vee \sim R$ — از ۴
*6 $\sim P \vee Q$ — از ۱
*7 $\sim Q \vee R$ — از ۲

~P				~R				از ۵
~P		Q		~P		Q		از ۶
~Q	R	~Q	R	~Q	R	~Q	R	از ۷
1	2	#	4	5	#	#	#	

در برهان بالا،

۱. وقتی به سطر ۷ می‌رسیم سطرهای ۱ تا ۴ ستاره گرفته‌اند و سطرهای ۵ تا ۷ بدون ستاره‌اند.
۲. سطر ۵ را با ستاره نشان کرده، دو شاخه جدید می‌سازیم.

۳. سطر ۶ را با ستاره نشان کرده، برای هر یک از دو شاخه موجود، دو شاخه جدید می‌سازیم.

۴. تاکنون به تناقض نرسیده‌ایم. از این رو، سطر ۷ را نیز با ستاره نشان کرده، برای هر یک از چهار شاخه موجود، دو شاخه جدید می‌سازیم.

۵. اکنون هشت شاخه داریم که در نیمی از آنها، تناقض وجود دارد. این شاخه‌ها را با # نشان داده‌ایم.

۶. چهار شاخه باقی مانده نه دارای دو فرمول متناقض هستند و نه دارای فرمول مرکبی که بتوان آنها را ساده کرد.

۷. بنابراین، استدلال نامعتبر است و از هر کدام از این شاخه‌های باز (= بدون تناقض) می‌توان مثال نقض به دست آورد:

۸. مثال‌های نقض را از شاخه‌های باز به روش زیر به دست می‌آید:

1	2	4	5
~P~Q	~PR	~PQR	~P~Q~R
PQ	PR	PQR	PQR
0 0	0 1	0 1 1	0 0 0

۹. هر کدام از شاخه‌های ۴ و ۵ سطری از جدول ارزش را نشان می‌دهند که در آن، مقدمات استدلال بالا صادق و نتیجه آن کاذب است.

۱۰. اما، شاخه‌های ۱ و ۲ که همه حروف آن ارزش‌دهی نشده است بیش از یک سطر جدول ارزش را نشان می‌دهند. برای تعیین این سطرها، به این روش عمل می‌کنیم که حرف فاقد ارزش را یک بار صادق و یک بار کاذب می‌گیریم:

1
~P~Q

PQ
0 0

PQR	PQR
0 0 1	0 0 0
1-1	1-2

2
~PR

PR
0 1

PQR	PQR
0 1 1	0 0 1
2-1	2-2

۱۱. چنان که مشاهده می‌شود ارزش‌دهی‌های ۱–۲ و ۲–۱ همان شاخه‌های ۵ و ۴ هستند و ۱–۱ برابر ۲–۲ است.

۱۲. بنابراین، در مجموع سه مثال نقض برای استدلال بالا وجود دارد که متناظر با سه سطر از جدول ارزش است.

					PQR
4	=	2-1	=		0 1 1
1-1	=	2-2	=		0 0 1
5	=	1-2	=		0 0 0

برای اطمینان از صحت این گفته، جدول ارزش را رسم می‌کنیم و نتایج بالا را مشاهده می‌کنیم:

			مقدمه	مقدمه	نتیجه
P	Q	R	P→Q	Q→R	P∧R
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

روش نموداری، در مقایسه با روش ارزش‌دهی، بسیار طولانی است. برای نمونه، برهان استدلال از P↔(Q↔R) به (P↔Q)↔R را در دو روش نموداری و ارزش‌دهی مقایسه کنید.

نکته‌ها:

۱. برای سرعت بخشیدن به روند برهان و کاستن از تعداد مراحل و شاخه‌ها، بهتر است قواعدی که درخت را دوشاخه می‌کنند پس از قواعد تک‌شاخه ساز به کار روند. از این رو، فرمول‌های عطفی را ابتدا و سپس فرمول‌های فصلی را تجزیه کنید.

۲. در صورت به دست آوردن مهارت کافی، بهتر است قواعد تبدیل را ذهنی انجام دهید و مستقیما به شاخه‌سازی بپردازید:

قواعد سریع شاخه‌سازی:

عطفی‌ها:

P<Q / Q, ~P

P>Q / P, ~Q

P↓Q / ~P, ~Q

P∧Q / P, Q

فصلی‌ها:

P↕Q: P, ~Q | Q, ~P

P↑Q: ~P | ~Q

P∨Q: P | Q

شرطی‌ها:

P↔Q: P, Q | ~P, ~Q

P←Q: P | ~Q

P→Q: ~P | Q

۳. حتی می‌توان از قواعد تناقض نیز چشم پوشید و مستقیما به اجزا رسید:

قواعد شاخه‌سازی از نقیض‌ها:

$$\frac{\sim(P\wedge Q)}{\sim P \quad \sim Q} \qquad \frac{\sim(P\vee Q)}{\begin{array}{c}\sim P\\ \sim Q\end{array}} \qquad \frac{\sim(P\rightarrow Q)}{\begin{array}{c}P\\ \sim Q\end{array}} \qquad \frac{\sim(P\leftarrow Q)}{\begin{array}{c}\sim P\\ Q\end{array}} \qquad \frac{\sim(P\leftrightarrow Q)}{\begin{array}{cc}P & Q\\ \sim Q & \sim P\end{array}} \qquad \frac{\sim\sim P}{P}$$

$$\frac{\sim(P\uparrow Q)}{\begin{array}{c}P\\ Q\end{array}} \qquad \frac{\sim(P\downarrow Q)}{P \quad Q} \qquad \frac{\sim(P>Q)}{\sim P \quad Q} \qquad \frac{\sim(P<Q)}{P \quad \sim Q} \qquad \frac{\sim(P\updownarrow Q)}{\begin{array}{cc}P & \sim P\\ Q & \sim Q\end{array}}$$

تمرین: اعتبار و عدم اعتبار استدلال‌های تمرین ارزش‌دهی را به روش نموداری تعیین کنید.