# منطق‌های وجهی غیر نرمال ........................................................ ۱


منطق کلاسیک C............................................................................................................................. ۲

منطق یکنواخت M.......................................................................................................................... ۳

منطق منتظم R................................................................................................................................ ۴

منطق نرمال K................................................................................................................................. ۵

اصول موضوعه ............................................................................................................................... ۷


## منطق‌های وجهی غیر نرمال

منطق‌های نرمال شناخته شده‌ترین بخش منطق موجهات هستند و نظام‌های K ، D ، T ، B ، S4 ، S5 ، Triv و Ver آشناترین منطق‌های نرمال برای نوآموزان منطق وجهی به شمار می‌رود. نظام وجهی K ، که نباید با منطق کلاسیک گزاره‌های K اشتباه گرفته شود، ضعیف‌ترین منطق نرمال است. منطق نرمال منطقی است که شامل اصل K ، ( $\Box(A \supset B) \supset (\Box A \supset \Box B)$ ) ، بوده و همه قضایایش ضروری باشد.

بسیاری از منطق‌های وجهی «غیر نرمال» هستند؛ یعنی یا اصل K قضیه آنها نیست یا برخی از قضایایشان ضروری نیست. منطق‌های غیر نرمال به دو دسته کلی تقسیم می‌شوند: دسته اول ضعیف‌تر از K و دسته دوم در عرض K هستند. بسیاری از منطق‌های وجهی وجود دارد که حتی از K نیز ضعیف‌ترند مانند منطق کلاسیک C ، منطق یکنواخت M و منطق منتظم R . هیچ کدام از این سه منطق، قضیه‌ای ضروری ندارند و منطق‌های C و M فاقد اصل K به عنوان قضیه هستند. بسیاری دیگر از منطق‌های وجهی غیر نرمال در عرض K قرار داشته، نسبت به آن، نه ضعیف‌ترند نه قوی‌تر. نظام‌های استلزام اکید لویس، S1 ، S2 و S3 در این دسته دوم قرار دارند و چنان که خواهیم دید، تنها در برخی قضایا با K مشترک هستند. نظام‌های S4 و S5 ، همان طور که گفتیم نرمال هستند.

نظام‌های وجهی غیر نرمال، هم از جهت سمانتیک و هم از جهت نظریه برهان، به منطق‌های ربط بسیار نزدیک و از همسایه‌های منطق ربط R به شمار می‌روند. برای نمونه، سه منطق از منطق‌های لویس، S1 ، S2 و S3 تقریبا با همان دغدغه‌های منطق‌دانان ربط پدید آمدند و شباهت فراوانی میان آنها و منطق‌های ربط وجود دارد. از سوی دیگر، ویلهلم آکرمان منطق انتاج خود، E ، را در راستای اصلاح و تکمیل کارهای لویس انجام داد و چنان که خواهیم دید، منطق E ضعیف‌تر از S3 بوده و درون آن قرار می‌گیرد.

نظام S1 شباهت بسیاری به منطق کلاسیک C دارد و در حقیقت، گسترش آن است و S2 و S3 نیز به منطق منتظم R شباهت داشته و آن را گسترش داده‌اند. از این رو، منطق S1 را «شبه کلاسیک» و منطق‌های S2 و S3 را «شبه منتظم» نامیده‌اند. «شبه منطق»ها تعریفی دقیق و ریاضی دارند که بعدا، به آن اشاره خواهد شد. اکنون، تنها به معرفی غیر دقیق این منطق‌ها می‌پردازیم: شبه منطق‌ها گسترش قضایای منطق هستند نه گسترش قواعد آن؛ یعنی، برای نمونه، منطق‌های شبه کلاسیک گسترش قضایای منطق کلاسیک C هستند یعنی همه قضایای C را به عنوان قضیه دارند اما قاعده اصلی C در آنها برقرار نیست. منطق‌های شبه منتظم، نیز، گسترش قضایای منطق منتظم R هستند یعنی همه قضایای R را به عنوان قضیه دارند اما قاعده اصلی R در آنها برقرار نیست.

با شناخت منطق‌های C و R ، اثبات و ابطال قضایا و قواعد در نظام‌های استلزام اکید لویس، S1 ، S2 و S3 بسیار آسان می‌شود و این کمک بزرگی به فهم عمیق از آنهاست.
اکنون، به بیان قواعد این منطق‌ها می‌پردازیم:

## منطق کلاسیک C

اگر به واژگان زبان منطق گزاره‌ها، نمادهای □ و ◊ را بیفزاییم و ◊A را به ~□~A تعریف کنیم و برای آن دو، هیچ قاعده استنتاجی بیان نکنیم جز آنکه قواعد دوطرفه، که می‌توانند در جزء فرمول‌ها به کار روند، در جزء فرمول‌های موجود در دامنه □ و ◊ نیز بتوانند به کار روند آنگاه به منطق کلاسیک C رسیده‌ایم.

در این منطق، به آسانی می‌توان قضایای زیر را اثبات کرد:

| | |
|---|---|
| $\Box A \leftrightarrow {\sim}{\sim}\Box A$ | $\Diamond A \leftrightarrow {\sim}\Box{\sim}A$ |
| $\Diamond A \leftrightarrow {\sim}{\sim}\Diamond A$ | $\Box A \leftrightarrow {\sim}\Diamond{\sim}A$ |
| $\Box A \leftrightarrow \Box{\sim}{\sim}A$ | ${\sim}\Diamond A \leftrightarrow \Box{\sim}A$ |
| $\Diamond A \leftrightarrow \Diamond{\sim}{\sim}A$ | ${\sim}\Box A \leftrightarrow \Diamond{\sim}A$ |
| $\Box (A \wedge B) \leftrightarrow \Box (B \wedge A)$ | ${\sim}\Box (A \wedge B) \leftrightarrow \Diamond ({\sim}A \vee {\sim}B)$ |
| $\Box (A \vee B) \leftrightarrow \Box (B \vee A)$ | ${\sim}\Box (A \vee B) \leftrightarrow \Diamond ({\sim}A \wedge {\sim}B)$ |
| $\Diamond (A \vee B) \leftrightarrow \Diamond (B \vee A)$ | ${\sim}\Diamond (A \vee B) \leftrightarrow \Box ({\sim}A \wedge {\sim}B)$ |
| $\Diamond (A \wedge B) \leftrightarrow \Diamond (B \wedge A)$ | ${\sim}\Diamond (A \wedge B) \leftrightarrow \Box ({\sim}A \vee {\sim}B)$ |

اگر ادات استلزام اکیدِ ⥽ را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$A \prec B =_{\text{تع}} \Box (A \rightarrow B)$$

آنگاه قضایای زیر را در منطق C خواهیم داشت:

| | |
|---|---|
| عکس نقیض | $(A \prec B) \leftrightarrow ({\sim}B \prec {\sim}A)$ |
| انقباض | $[A \prec (A \rightarrow B)] \leftrightarrow (A \prec B)$ |
| جذب | $[A \prec (A \wedge B)] \leftrightarrow (A \prec B)$ |
| صدور | $[(A \wedge B) \prec C] \leftrightarrow [A \prec (B \rightarrow C)]$ |

چنان که می‌بینیم، هیچ یک از قضایای بالا، ضروری نیستند.

### منطق یکنواخت M

در این منطق، علاوه بر برهانک‌های فرضی، برهانک‌های وجهی نیز خواهیم داشت. برهانک وجهی را با یک خط راست عمودی نشان می‌دهیم که یک نماد $\Box$ یا $\Diamond$ در سمت چپ بالای آن قرار دارد. فرمول‌های وجهی به این برهانک‌ها می‌توانند وارد و از آنها خارج شوند. نماد وجهی، هنگام ورود، حذف و هنگام خروج، معرفی می‌شود. این قواعد حذف و معرفی را ما قواعد ورود و خروج می‌نامیم:

| قاعده \ برهانک | برهانک ضروری | برهانک امکانی |
|---|---|---|
| ورود به سطر اول | $\Box A$<br>$\Box \mid A$<br>$\mid$ | $\Diamond A$<br>$\Diamond \mid A$<br>$\mid$ |
| | | |
| خروج | $\Box \mid$<br>$\mid A$<br>$\therefore \quad \Box A$ | $\Diamond \mid$<br>$\mid A$<br>$\therefore \quad \Diamond A$ |

توجه: در سطرهای غیر اولِ برهانک‌های وجهی، همه قواعد وجهی و همه قواعد اصلی و فرعی منطق گزاره‌ها می‌تواند به کار رود. از مهم‌ترین این قواعد، می‌توان به قاعده معرفی قضیه، قاعده فرض، قاعده دلیل شرطی، قاعده وضع مقدم، قاعده برهان خلف و دیگر قواعد اشاره نمود. قواعد دوطرفه در جزء فرمول‌های وجهی و غیر وجهی به کار می‌روند و بنابراین، منطق منتظم M شامل منطق کلاسیک C است.

در M ، بسیاری از قضایا را می‌توان اثبات کرد که قضیهٔ C نیستند:

$\Box ( A \wedge B) \rightarrow \Box A$　　$\Box A \rightarrow \Box ( A \vee B)$

$\Box ( A \wedge B) \rightarrow \Box B$　　$\Box A \rightarrow \Box ( A \vee B)$

$\Diamond ( A \wedge B) \rightarrow \Diamond A$　　$( \Diamond A \rightarrow \Diamond ( A \vee B)$

$\Diamond ( A \wedge B) \rightarrow \Diamond B$　　$\Diamond A \rightarrow \Diamond ( A \vee B)$

$\Box ( A \wedge B) \rightarrow ( \Box A \wedge \Box B)$　　$( \Box A \vee \Box B) \rightarrow \Box ( A \vee B)$

$\Diamond ( A \wedge B) \rightarrow ( \Diamond A \wedge \Diamond B)$　　$( \Diamond A \vee \Diamond B) \rightarrow \Diamond ( A \vee B)$

$\Box A \rightarrow ( B \prec A)$　　$A \prec ( B \rightarrow B)$

$\Box{\sim}A \rightarrow ( A \prec B)$　　$( A \wedge {\sim}A) \prec B$

## منطق منتظم R

علاوه بر دو قاعده ورود به سطر اول و دو قاعده خروج، در این منطق، فرمول‌های ضروری می‌توانند به سطرهای غیر اول برهانک‌های وجهی وارد شوند:

| برهانک / قاعده | برهانک ضروری | برهانک امکانی |
|---|---|---|
| ورود ضروری به سطر غیر اول | $\Box A$<br>$\Box$ \| <br>$\therefore$ \| $A$ | $\Box A$<br>$\Diamond$ \| <br>$\therefore$ \| $A$ |

در R ، اصل K و قضایای بسیاری قابل اثبات است:

اصل K برای ضرورت　　$\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$

اصل K برای امکان　　$\Box(A \to B) \to (\Diamond A \to \Diamond B)$

$(\Box A \wedge \Diamond B) \to \Diamond(A \wedge B)$　　$\Box(A \vee B) \to (\Box A \vee \Diamond B)$

$(\Box A \wedge \Diamond B) \to \Diamond(A \wedge B)$　　$\Box(A \vee B) \to (\Diamond A \vee \Box B)$

در R ، عکس بسیاری از قضایای M قابل اثبات است و از این رو این قضایا به هم‌ارزی تبدیل می‌شوند:

$(\Box A \vee \Box B) \to \Box(A \vee B)$　　$\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$

$(\Diamond A \vee \Diamond B) \leftrightarrow \Diamond(A \vee B)$　　$\Diamond(A \wedge B) \to (\Diamond A \wedge \Diamond B)$

### منطق نرمال K

در منطق‌های پیشین، هیچ کدام از قضایا ضروری نبودند و قضیه‌ای به صورت $\Box A$ یا $A \prec B$ نداشتیم. علت این مسئله این است که در این منطق‌ها، برهانک ضروری را بدون فرمول ضروری نمی‌توان ساخت. از این رو، هر فرمول ضروری مبتنی بر دست کم یک فرمول ضروری است و به همین دلیل، فرمول‌های ضروری در مقدم و تالی قضایا می‌توانند باشند اما در ابتدای قضایا نمی‌توانند قرار بگیرند.

منطق نرمال K ضعیف‌ترین نظامی است که همه قضایای آن ضروری‌اند. در منطق K ، علاوه بر قواعد نظام‌های پیشین، برهانک ضروری را بدون فرمول ضروری نیز می‌توان ساخت. در این صورت، سطر اول برهانک ضروری می‌تواند قضیه، فرض ( یعنی یک برهانک فرضی) یا یک برهانک ضروری جدید باشد:

| معرفی قضیه | برهانک فرضی | برهانک ضروری جدید |
|---|---|---|
| $\Box$ │ A　معرفی قضیه | $\Box$ │ ┌ A　فرض | $\Box$ │ $\Box$ │ A |

واضح است که در حالت سوم، برهانک ضروری جدید، در سطر اول، یکی از سه حالت بالا رخ خواهد داد.

در K ، علاوه بر قضایای نظام‌های پیشین، ضرورت آن قضایا را نیز داریم:

$\Box ( A \to A)$

$\Box\Box ( A \to A)$

$\Box\Box\Box ( A \to A)$

$A \prec A$

$\Box ( A \prec A)$

$\Box\Box ( A \prec A)$

$\Box ( A \to B) \prec ( \Box A \to \Box B)$　　تقویت اصل K برای ضرورت

$\Box ( A \to B) \prec ( \Diamond A \to \Diamond B)$　　تقویت اصل K برای امکان

$\Box ( A \vee B) \prec ( \Box A \vee \Diamond B)$　　$( \Box A \wedge \Diamond B) \prec \Diamond ( A \wedge B)$

$\Box ( A \vee B) \prec ( \Diamond A \vee \Box B)$　　$( \Box A \wedge \Diamond B) \prec \Diamond ( A \wedge B)$

$( \Box A \vee \Box B) \prec \Box ( A \vee B)$　　$\Diamond ( A \wedge B) \prec ( \Diamond A \wedge \Diamond B)$

اگر علاوه بر ادات استلزام اکیدِ $\prec$ ، ادات هم‌ارزی اکیدِ = را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$A \prec B =_{\text{تع}} \Box ( A \to B)$$

$$A = B =_{\text{تع}} \Box ( A \leftrightarrow B)$$

آنگاه همه قضایای هم‌ارزی را با = نیز می‌توانیم نشان بدهیم:

| | |
|---|---|
| $\Box A = {\sim}{\sim}\Box A$ | $\Diamond A = {\sim}\Box{\sim}A$ |
| $\Diamond A = {\sim}{\sim}\Diamond A$ | $\Box A = {\sim}\Diamond{\sim}A$ |
| $\Box A = \Box{\sim}{\sim}A$ | ${\sim}\Diamond A = \Box{\sim}A$ |
| $\Diamond A = \Diamond{\sim}{\sim}A$ | ${\sim}\Box A = \Diamond{\sim}A$ |
| $\Box ( A \wedge B) = \Box ( B \wedge A)$ | ${\sim}\Box ( A \wedge B) = \Diamond ( {\sim}A \vee {\sim}B)$ |
| $\Box ( A \vee B) = \Box ( B \vee A)$ | ${\sim}\Box ( A \vee B) = \Diamond ( {\sim}A \wedge {\sim}B)$ |
| $\Diamond ( A \vee B) = \Diamond ( B \vee A)$ | ${\sim}\Diamond ( A \vee B) = \Box ( {\sim}A \wedge {\sim}B)$ |
| $\Diamond ( A \wedge B) = \Diamond ( B \wedge A)$ | ${\sim}\Diamond ( A \wedge B) = \Box ( {\sim}A \vee {\sim}B)$ |

| | |
|---|---|
| $( A \prec B) = ( {\sim}B \prec {\sim}A)$ | عکس نقیض |
| $[A \prec ( A \to B)] = ( A \prec B)$ | انقباض |
| $[A \prec ( A \wedge B)] = ( A \prec B)$ | جذب |
| $[ ( A \wedge B) \prec C] = [A \prec ( B \to C)]$ | صدور |

| | |
|---|---|
| $\Box ( A \wedge B) = ( \Box A \wedge \Box B)$ | $( \Box A \vee \Box B) \prec \Box ( A \vee B)$ |
| $\Diamond ( A \wedge B) \prec ( \Diamond A \wedge \Diamond B)$ | $( \Diamond A \vee \Diamond B) = \Diamond ( A \vee B)$ |

در K ، می‌توان قاعده فرعی بسیار مفید زیر را اثبات کرد:

$\Diamond$ |

　| $A \wedge {\sim}A$

$\therefore \quad A \wedge {\sim}A$

خروج تناقض از برهانک امکانی

این قاعده می‌گوید که تناقض ممکن نیست و بنابراین، امکان تناقض به مثابه خود تناقض است. در نظام‌های پیشین، تناقض می‌توانست ممکن باشد! زیرا در آنها، هیچ گزارهٔ ضروری، قضیه نبود. اما چنان که می‌بینیم، در K ، تناقض ممتنع و غیر ممکن است. در سمانتیک این منطق‌ها، خواهیم دید که در جهان‌های ممکن K ، تناقض در هیچ جهانی ممکن نیست اما در جهان‌های C ، M و R ، دست کم یک جهان وجود دارد که تناقض، در آن، ممکن است! این جهان‌ها را «غیر نرمال» می‌نامند و «غیر نرمال» نامیدن این سه نظام، نیز، به دلیل داشتن جهان‌های غیر نرمال در سمانتیک آنهاست.

### اصول موضوعه

منطق‌های C و M اصل موضوع ندارند و تنها اصل موضوع R و K همان اصل معروف K است. از سوی دیگر، قاعده ضرورت، در منطق‌های C ، M و R ، تضعیف می‌شود:

| قاعده هم‌ارزی ضرورت | قاعده استلزام ضرورت | قاعده ضرورت |
|---|---|---|
| $\vdash A \leftrightarrow B$ | $\vdash A \to B$ | $\vdash A$ |
| $\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$ | $\vdash \Box A \to \Box B$ | $\vdash \Box A$ |

بنابراین، نظام اصل موضوعی این چهار نظام را به صورت زیر می‌توان بیان کرد:

| | منطق کلاسیک C | منطق یکنواخت M | منطق منتظم R | منطق نرمال K |
|---|---|---|---|---|
| اصل موضوع | *** | *** | اصل موضوع K | اصل موضوع K |
| قاعده | قاعده هم‌ارزی ضرورت | قاعده استلزام ضرورت | قاعده استلزام ضرورت | قاعده ضرورت |

و یا به طور صریح‌تر:

| | منطق کلاسیک C | منطق یکنواخت M | منطق منتظم R | منطق نرمال K |
|---|---|---|---|---|
| اصل موضوع | *** | *** | $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ | $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ |
| قاعده | $\dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$ | $\dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B}$ | $\dfrac{\vdash A \to B}{\vdash \Box A \to \Box B}$ | $\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A}$ |

منطق‌های C ، M ، R و K ، به ترتیب، از ضعیف‌ترین به قوی‌ترین چیده شده‌اند زیرا می‌توان نشان داد که قاعده ضرورت، در حضور اصل K ، قوی‌تر از استلزام ضرورت و این، به نوبه خود، قوی‌تر از هم‌ارزی ضرورت است:

اثبات قاعده استلزام ضرورت به کمک قاعده ضرورت و اصل K :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\vdash A \to B$ | مقدمه |
| 2 | $\vdash \Box(A \to B)$ | قاعده ضرورت ( ۱) |
| 3 | $\vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ | اصل K |
| 4 | $\vdash \Box A \to \Box B$ | وضع مقدم ( ۲ و ۳) |

اثبات قاعده هم‌ارزی ضرورت به کمک قاعده استلزام ضرورت:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\vdash A \leftrightarrow B$ | مقدمه |
| 2 | $\vdash A \rightarrow B$ | حذف $\leftrightarrow$ ( ۱) |
| 3 | $\vdash B \rightarrow A$ | حذف $\leftrightarrow$ ( ۱) |
| 4 | $\vdash \Box A \rightarrow \Box B$ | قاعده استلزام ضرورت ( ۲) |
| 5 | $\vdash \Box B \rightarrow \Box A$ | قاعده استلزام ضرورت ( ۳) |
| 6 | $\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B$ | معرفی $\leftrightarrow$ ( ۴ و ۵) |

تمرین:

۱. نشان دهید که منطق‌های C ، M ، R و K را به صورت زیر نیز می‌توان اصل موضوعی کرد:

| | منطق کلاسیک<br>C | منطق یکنواخت<br>M | منطق منتظم<br>R | منطق نرمال<br>K |
|---|---|---|---|---|
| اصل موضوع | *** | $\Box(A \wedge B) \rightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ | $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$ | $\Box(A \wedge B) \leftrightarrow (\Box A \wedge \Box B)$<br>$\Box(A \rightarrow A)$ |
| قاعده | $\dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$ | $\dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$ | $\dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$ | $\dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$ |

در این صورت، نشان داده‌ایم که اختلاف منطق‌های C ، M ، R و K را تنها به کمک اصول موضوعه می‌توان نشان داد.

۲. نشان دهید که منطق‌های C ، M ، R و K را به صورت زیر نیز می‌توان اصل موضوعی کرد:

| | |
|---|---|
| منطق کلاسیک<br>C | $\dfrac{\vdash A \leftrightarrow B}{\vdash \Box A \leftrightarrow \Box B}$ |
| منطق یکنواخت<br>M | $\dfrac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash \Box A \rightarrow \Box B}$ |
| منطق منتظم<br>R | $\dfrac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash \Box A \rightarrow \Box B} + \dfrac{\vdash (A \wedge B) \rightarrow C}{\vdash (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box C}$ |
| منطق نرمال<br>K | $\dfrac{\vdash A}{\vdash \Box A} + \dfrac{\vdash A \rightarrow B}{\vdash \Box A \rightarrow \Box B} + \dfrac{\vdash (A \wedge B) \rightarrow C}{\vdash (\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box C}$ |

در این صورت، نشان داده‌ایم که اختلاف منطق‌های C ، M ، R و K را تنها به کمک قواعد می‌توان نشان داد.

۳. نشان دهید که قواعد M ، R و K را با تک قاعدهٔ RK

$$\frac{\vdash (A_1 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B}{\vdash (\Box A_1 \wedge \ldots \wedge \Box A_n) \rightarrow \Box B} \quad \text{قاعده RK}$$

می‌توان نشان داد که در آن، داریم:

| | | |
|---|---|---|
| منطق یکنواخت M | $n \in \{1\}$ | $n = 1$ |
| منطق منتظم R | $n \in \{1, 2\}$ | $n = 1 \vee n = 2$ |
| منطق نرمال K | $n \in \{0, 1, 2\}$ | $n = 0 \vee n = 1 \vee n = 2$ |

۴. نشان دهید که افزودن قاعده ضرورت به منطق کلاسیک C و منطق یکنواخت M ، به نظام‌های جدیدی متفاوت با R و K می‌انجامد. تحقیق کنید که شرط قاعده RK برای این دو نظام برابر است با $n = 0$ و $n \in \{0, 1\}$ .

۵. نشان دهید که افزودن اصل K به منطق کلاسیک C ، به نظام جدیدی متفاوت با نظام‌های پیش‌گفته می‌انجامد. تحقیق کنید که شرط قاعده RK برای این نظام برابر است با $n = 2$ .