فصل اول: منطق ربط R

نظام استنتاج طبیعی

اولین نظام‌های استنتاج طبیعی را استانیسلاو یاکوفسکی از لهستان و گرهارت گنتزن از آلمان، هر دو در سال ۱۹۳۴ به طور مستقل از هم تأسیس کردند.

یاکوفسکی دو روش برهانک و شماره‌فرض را پایه گذاری کرد. در روش اول، برهان به یک یا چند برهانک یا زیر برهان تقسیم می‌شود که هر یک، در واقع، برهان فرمولی از فرمول‌های برهان اصلی هستند و با یک فرض شروع می‌شوند. یاکوفسکی برهانک‌ها را درون مستطیل قرار می‌داد ولی بعدها منطق‌دانان تنها خط عمودی سمت چپ این مستطیل را باقی گذاشتند. یاکوفسکی در روش دوم خود، فرض‌ها را به جای اینکه با خطوط یا مستطیل‌ها نشان دهد به کمک شماره‌ای که به فرض‌ها می‌داد معین می‌نمود. این شماره‌فرض‌ها در کنار هر فرمولی که به آن فرض‌ها مبتنی بود نوشته می‌شد. منطق‌دان‌هایی مانند فیچ و کپی، روش برهانک را و منطق‌دان‌هایی مانند ساپز و لمون، روش شماره‌فرض را توسعه و گسترش دادند. اندرسون و بلنپ، برای اولین بار، این دو روش را با هم ترکیب کرده، اولین نظام‌های استنتاج طبیعی منطق ربط را پایه‌گذاری کردند. در این کتاب، ما روش ترکیبی اندرسون و بلنپ را به کار می‌بریم.

گرهارت گنتزن نیز دو روش برای استنتاج طراحی کرده بود ولی تنها یکی از آنها استنتاج طبیعی بود. روش دوم گنتزن، امروزه، به «حساب رشته‌ها» شهرت دارد. روش استنتاج طبیعی گنتزن همان روش برهانک یاکوفسکی است تنها با این تفاوت که برهانک‌ها، در روش یاکوفسکی، به طور عمودی و زیر هم نوشته می‌شوند؛ به اصطلاح، روش یاکوفسکی روش خطی است. در نظام استنتاج طبیعی گنتزن، برهانک‌ها و فرمول‌ها در کنار هم نوشته می‌شوند و اگر دو فرمول یا یک فرمول و یک برهانک، نتیجه‌ای مشترک داشته باشند آن نتیجه زیر آن دو نوشته می‌شود. در این روش، برهان به شکل درخت در می‌آید که برگ‌های آن مقدمات یا فرض‌ها هستند و شاخه‌های آن برهانک‌ها و فرمول‌های به دست آمده و پایین ساقه اصلی درخت همان نتیجه برهان است. از همین رو، روش گنتزن را «روش درختی» نیز می‌گویند. از آنجا که این روش تفاوت ریشه‌ای با روش برهانک یاکوفسکی ندارد، از طرح آن در این کتاب خودداری خواهیم کرد.

حساب رشته‌های گنتزن که در عرض روش‌های استنتاج طبیعی و اصل موضوعی است، داستان کاملا متفاوتی دارد. این حساب، به جای اینکه رابطه فرمول‌ها را با هم بسنجد رابطه رشته‌ها را با هم می‌سنجد. رشته، گاهی، ترکیبی از مجموعه مقدمات و مجموعه نتایج است و گاهی دیگر، ترکیبی از دنباله مقدمات و دنباله نتایج است. در رشته، گاهی شرط می‌کند یک نتیجه وجود داشته باشد و گاهی اجازه می‌دهند که چندین نتیجه وجود داشته باشد. ترکیب نتایج گاهی به معنای عطف میان آنهاست و گاهی به معنای فصل میان آنها. حساب رشته‌ها در شکل تعمیم یافته خود به منطق بسیار

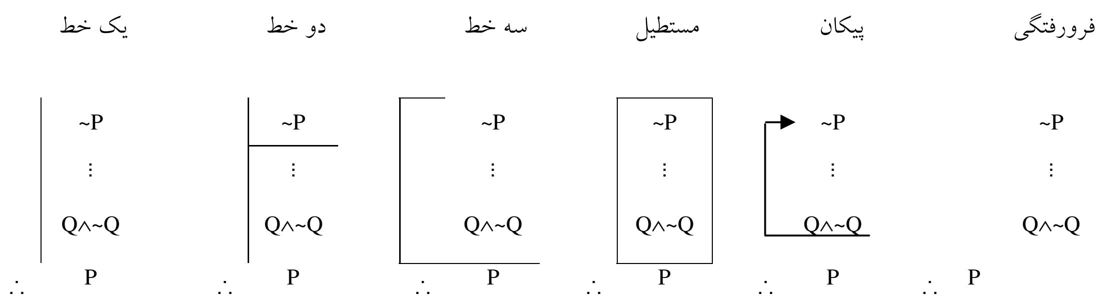
زیبا و ظریفی منتهی شده است که بلنپ آن را «منطق نمایش» نامیده است. این حساب و این منطق را جداگانه ذکر خواهیم کرد.

قواعد استنتاج طبیعی در منطق کلاسیک

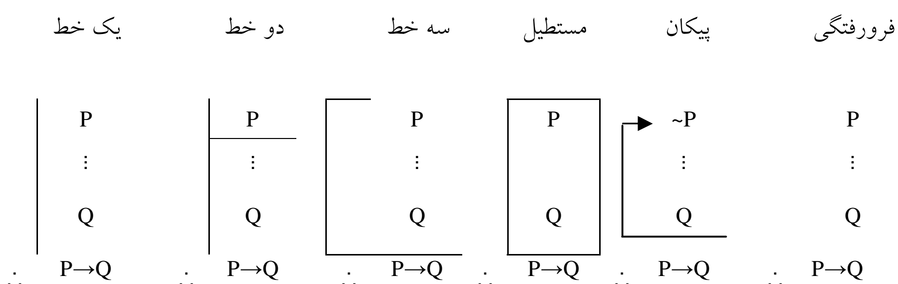
روش برهانک

برهانک بخشی از برهان است که نقش برهان کمکی را بر عهده دارد. گاهی پیش می‌آید که بخشی از برهان اصلی خود نیازمند برهان است و باید برای آن برهان اقامه نمود. این برهان فرعی را در علم منطق، «برهانک» و در ریاضیات، «لم» می‌نامند. در ریاضیات، لم‌ها را جدای از برهان اصلی ذکر می‌کنند اما در منطق، برهانک را درون برهان اصلی می‌آورند و فرعی بودن آن را با شماره‌فرض‌ها، فرورفتگی، مستطیل، یک خط عمودی، یک خط عمودی و یک خط افقی یا این دو به همراه پیکان نشان می‌دهند. ما برای این کار از دو خط افقی و یک خط عمودی استفاده می‌کنیم. بهترین مثال برای برهانک، برهان خلف و دلیل شرطی است. روش برهانک را برای این دو به طور تفصیلی شرح می‌دهیم:

در برهان خلف، برای اثبات نتیجه، نقیض آن را فرض کرده، از دل آن، یک تناقض بیرون می‌کشند. این روش‌ها را در زیر برای قاعده برهان خلف به نمایش گذاشته‌ایم:



در دلیل شرطی، وقتی از یک فرض، نتایجی را به دست می‌آوریم، چکیده این استنتاج را در یک گزاره شرطی به صورت افقی می‌نویسیم.روش‌های مذکور را برای دلیل شرطی می‌آوریم:



در برهانک‌ها، سطر اول همواره یک فرض کمکی است. فرض را پیش از پایان برهانک، «فرض باز» و پس از آن، «فرض بسته» می‌نامند. همچنین، برهانک را پس از پایان، «برهانک محذوف» یا «برهانک مختوم» می‌نامند زیرا دیگر نمی‌توان قواعد را بر فرمول‌های آن اعمال کرد و این به منزله حذف آن است. بر این اساس، درون برهانک، قواعد را تنها بر فرمول‌های آن برهانک و فرمول‌های پیشین که در دامنه فرضهای بسته نیستند می‌توان اعمال کرد. برهانک می‌تواند تک سطر باشد که در این صورت، سطر اول و آخر یکی خواهند بود.

برای فرض‌ها و برهانک‌ها، می‌توان قواعد معرفی و حذف را بیان کرد:

۱. معرفی فرض: در هر سطر برهان، هر فرمول دلخواه را می‌توان فرض کرد.
۲. حذف فرض: برهانک را در هر سطر دلخواه می‌توان به پایان برد و یکی از قواعد مربوط به برهانک را بر آن به کار برد. (با این کار، کل برهانک را نابود شده می‌پنداریم و هیچ قاعده‌ای را بر فرمول‌های آن به کار نمی‌بندیم.)

مقدمه‌ها همگی «فرض باز» هستند و بر خلاف فرض‌های کمکی، نباید بسته شوند. از این روست که برای مقدمه‌ها، خطوط برهانک ترسیم نمی‌شود.

روش شماره‌فرض

روش شماره‌فرض نیاز به توضیح بیشتری دارد:

		شماره سطر	شماره‌فرض
	$\sim P$	(m)	m
	⋮	⋮	⋮
	$Q \wedge \sim Q$	(n)	i, j, m
	P	(n+1)	i, j
∴			

در این برهان، می‌خواهیم P را اثبات کنیم؛ به همین منظور، در سطر m ام برهان، نقیض P را فرض می‌کنیم. برای اینکه نشان دهیم این سطر مفروض است و از سطرهای دیگر برهان به دست نیامده است شماره آن را سمت چپ آن می‌نویسیم. به طور کلی، هر گاه شماره سطر یک فرمول و شماره فرض آن یکسان باشد آن فرمول مفروض است. حال اگر با استفاده از این فرض، (و احتمالا با استفاده از فرض‌های دیگر، مانند فرض‌های سطر i ام و سطر j ام) بتوانیم در سطر n ام، به یک تناقض برسیم نشان داده‌ایم که نقیض P نادرست بوده که به تناقض منتهی شده است. بنابراین، در سطر n+1 ام، نتیجه می‌گیریم که P صادق است. این نتیجه بر همه فرض‌های سطر متناقض استوار است مگر سطر m. در مثال بالا، چون تناقض در سطر n مبتنی بر فرض‌های i، j و m است همه این شماره‌ها را مگر شماره m را در سمت چپ سطر n+1 می‌نویسیم.

روش شماره‌فرض در دلیل شرطی، نیز، نیاز به توضیح بیشتری دارد:

	شماره‌فرض	شماره سطر	
	m	(m)	P
	⋮	⋮	⋮
	i, j, m	(n)	Q
∴	i, j	(n+1)	$P \to Q$

در این برهان، می‌خواهیم $P \to Q$ را اثبات کنیم؛ به همین منظور، در سطر m ام برهان، مقدم شرطی، یعنی P، را فرض می‌کنیم. اینجا نیز، برای اینکه نشان دهیم این سطر مفروض است و از سطرهای دیگر برهان به دست نیامده است شماره آن را سمت چپ آن می‌نویسیم. حال اگر با استفاده از این فرض، (و احتمالا با استفاده از فرض‌های دیگر، مانند فرض‌های سطر i ام و سطر j ام) بتوانیم در سطر n ام، به تالی شرطی مذکور، یعنی به Q، برسیم نشان داده‌ایم که P مستلزم Q است. بنابراین، در سطر n+1 ام، نتیجه می‌گیریم که $P \to Q$ صادق است. این نتیجه بر همه فرض‌های سطر متناقض استوار است مگر سطر m. در مثال بالا، چون تالی در سطر n مبتنی بر فرض‌های i، j و m است همه این شماره‌ها را مگر شماره m را در سمت چپ سطر n+1 می‌نویسیم.

ترکیب روش برهانک و شماره‌فرض

در این روش، هم خط‌کشی‌های روش برهانک را به کار می‌بریم هم برای فرمول‌ها، شماره فرض‌های آن را می‌نویسیم. حسن این روش در این است که هم سادگی بصری روش برهانک در آن حفظ می‌شود و هم مربوط بودن مقدمات و نتایج به هم قابل بررسی است. برای نمونه، مثال‌های برهان خلف و دلیل شرطی را در زیر با ترکیب دو روش آورده‌ایم:

	شماره‌فرض	شماره سطر	
	m	(m)	$\sim P$
	⋮	⋮	⋮
	i, j, m	(n)	$Q \wedge \sim Q$
∴	i, j	(n+1)	P

	شماره‌فرض	شماره سطر	
	m	(m)	P
	⋮	⋮	
	i, j, m	(n)	Q
∴	i, j	(n+1)	$P \to Q$

در روش برهانک، مانند سایر روش‌ها، ساده‌ترین قاعده‌ها مربوط به گزاره‌های عطفی است و به همین دلیل این قواعد را ابتدا ذکر می‌کنیم. قواعد عطفی فاقد هر گونه برهانک است و راز سادگی آن نیز در همین امر نهفته است:

۱. قواعد عاطف:

حذف عاطف:
$$\frac{P\wedge Q}{P}$$

حذف عاطف:
$$\frac{P\wedge Q}{Q}$$

حذف عاطف:
$$\frac{P\wedge Q}{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}$$

معرفی عاطف:
$$\frac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{P\wedge Q}$$

۱. متعدد بودن مقدمات به این معناست که هر دو مقدمه برای نتیجه‌گیری مورد نیاز هستند. برای نمونه، برای به دست آوردن P∧Q، نیازمند P و Q هستیم و اگر این دو جزء در سطرهایی از برهان باشند می‌توان ترکیب P∧Q را نتیجه گرفت. در این صورت، شماره سطرهای P و Q را، به عنوان توضیح، در برابر P∧Q می‌نویسیم.
۲. متعدد بودن نتایج در قواعد حذف، در اینجا، به معنای این است که هر یک از دو نتیجه را می‌توان به دست آورد. (در برخی کتاب‌ها، تعدد نتایج به معنای ناسازگاری صدق همه مقدمات با کذب همه نتایج است. ما، در این کتاب، این معنا را به دلیل دور بودن از ذهن، قصد نمی‌کنیم.) برای مثال، از P∧Q، هم می‌توان P را به دست آورد هم Q را. در هر صورت، شماره P∧Q را، برای یادآوری و توضیح، در برابر جزء‌های به دست آمده می‌نویسیم.
۳. نتیجه بر همان فرض‌هایی استوار است که مقدمه (ها). توجه کنید که در معرفی عاطف، چون دو مقدمه داریم و ممکن است فرض‌های این دو مقدمه متفاوت باشند، همه این فرض‌ها را به عنوان فرض‌های نتیجه در کنار آن می‌نویسیم.

۲. قواعد ناقض:

قواعد ناقض بر دو قسم است: یکی برهان خلف و دیگری قاعده (نفی در نفی = اثبات)

معرفی نقض مضاعف
$$\frac{P}{\sim\sim P}$$

حذف نقض مضاعف
$$\frac{\sim\sim P}{P}$$

برهان خلف (معرفی ناقض)
$$\begin{array}{|c}P\\\vdots\\Q\wedge\sim Q\\\hline\end{array}\qquad \therefore\ \sim P$$

برهان خلف (حذف ناقض)
$$\begin{array}{|c}\sim P\\\vdots\\Q\wedge\sim Q\\\hline\end{array}\qquad \therefore\ P$$

توضیحات:

۱. دو قاعده نقض مضاعف عکس یکدیگر و تک‌مقدمه‌ای هستند. هر دو قاعده تک‌مقدمه‌ای را که عکس یکدیگر باشند می‌توان به صورت یک قاعده دو طرفه نوشت. برای نمونه، دو قاعده نقض مضاعف را به صورت زیر می‌نویسیم:

نقض مضاعف

$$\begin{array}{c} P \\ \hline\hline \sim\sim P \end{array}$$

۲. یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های قواعد دو مقدمه‌ای این است که در جزء فرمول نیز به کار می‌روند. بنابراین، اگـر فرمولی در سطری از برهان شامل دو ناقض متوالی در اجزای آن بود می‌توان آن دو ناقض را با هم حذف کرد یا به هر بخشی از فرمول افزود.

۳. دو قاعده معرفی و حذف ناقض دو صورت قاعده برهان خلف هستند. بنا به این قاعده، فرضی که به تنـاقض بینجامد باطل است و نقیض آن صادق است. بنابراین، اگر فرض P به تناقض بینجامد P~ نتیجه می‌شود و اگر فرض P~ به تناقض بینجامد P نتیجه می‌شود.

۴. مجموعه فرمول‌هایی را که از فرض شروع شده و به تناقض منتهـی مـی‌شـوند (بـه عبـارت دیگـر، مجموعـه فرمول‌های داخل پاره‌خط‌ها را) «برهانک» می‌نامند. شکل کامل این دو برهان به صورت زیر است:

برهان خلف (معرفی ناقض)

	m	(m)	P
	⋮	⋮	⋮
	i, j, m	(n)	$Q\wedge\sim Q$
∴	i, j	(n+1)	$\sim P$

برهان خلف (حذف ناقض)

	m	(m)	$\sim P$
	⋮	⋮	⋮
	i, j, m	(n)	$Q\wedge\sim Q$
∴	i, j	(n+1)	P

۵. در هر دو صورتِ برهان خلف، نتیجه بر همان فرض‌های تناقض استوار است مگر فرض برهانک.

۳. قواعد شرطی:

معرفی →

$$\frac{Q}{P\to Q}\qquad \frac{\sim P}{P\to Q}$$

دلیل شرطی

قیاس افتراض

	P
	⋮
	Q
∴	$P\to Q$

حذف →

قیاس استثنایی

رفع تالی

$$\begin{array}{c} P\to Q \\ \sim Q \\ \hline \sim P \end{array}$$

وضع مقدم

$$\begin{array}{c} P\to Q \\ P \\ \hline Q \end{array}$$

توضیحات:

۱. دو قاعده معرفی → بنا به جدول ارزش معتبرند. اگر تالی صادق باشد شرطی صادق خواهد بود؛ همچنین، اگر مقدم کاذب باشد شرطی صادق خواهد بود.

۲. قیاس افتراض، که خود نوعی معرفی → است، عکس قیاس استثناییِ وضع مقدم است که در منطق مگاری- رواقی شناخته شده بوده است. قیاس افتراض، در اینجا، می‌گوید برای اثبات P→Q ، می‌توان از فرض P به Q رسید. شکل کامل دلیل شرطی به صورت زیر است:

دلیل شرطی

قیاس افتراض

	m	(m)	P
	⋮	⋮	
	i, j, m	(n)	Q
∴	i, j	(n+1)	P→Q

۳. در اینجا نیز، نتیجه بر همان فرض‌های سطر آخر برهانک استوار است مگر فرض برهانک.

۴. قواعد دوشرطی:

معرفی ↔

P	~P
Q	~Q
P↔Q	P↔Q

دلیل شرطی

قیاس افتراض

فرض	P
	⋮
	Q
فرض	Q
	⋮
	P
دلیل شرطی	∴ P↔Q

حذف ↔

قیاس استثنایی

رفع تالی	رفع مقدم	وضع تالی	وضع مقدم
P↔Q	P↔Q	P↔Q	P↔Q
~Q	~P	Q	P
~P	~Q	P	Q

توضیحات:

۱. دو قاعده معرفی ↔ بنا به جدول ارزش معتبرند. دو شرطی وقتی صادق است که دو طرف آن هر دو صادق یا هر دو کاذب باشند.

۲. قیاس افتراض، که خود نوعی معرفی ↔ است، عکس قیاس استثنایی است که در منطق مگاری- رواقی شناخته شده بوده است. قیاس افتراض، در اینجا، می‌گوید برای اثبات P↔Q ، می‌توان از فرض P به Q رسید و برعکس. شکل کامل این قیاس به صورت زیر است:

دلیل شرطی

قیاس افتراض

m	(m)	P	فرض
⋮	⋮	⋮	
i,m	(n)	Q	
n+1	(n+1)	Q	فرض
⋮	⋮	⋮	
j,n+1	(o)	P	
∴ i,j	(o+1)	$P \leftrightarrow Q$	دلیل شرطی

۳. در این دلیل شرطی، نتیجه مبتنی بر فرض‌های سطرهای آخر دو برهانک است مگر فرض‌های برهانک‌ها.

۵. قواعد مانع خلو:

معرفی ∨

$$\frac{P}{P \vee Q} \qquad \frac{Q}{P \vee Q}$$

قیاس افتراض

~Q
⋮
P
$P \vee Q$

قیاس افتراض

~P
⋮
Q
$P \vee Q$

قیاس استثنایی

$$\frac{P \vee Q \quad \sim P}{Q} \qquad \frac{P \vee Q \quad \sim Q}{P}$$

قیاس مقسم

حذف ∨

$P \vee Q$
P
⋮
R
Q
⋮
R
∴ R

توضیحات:

۱. دو قاعده معرفی ∨ بنا به جدول ارزش معتبرند. ترکیب مانع خلو وقتی صادق است که یکی از طرفین آن صادق باشد.

۲. قیاس افتراض، که خود نوعی معرفی ∨ است، عکس قیاس استثنایی است که در منطق مگاری- رواقی شناخته شده بوده است. قیاس افتراض، در اینجا، می‌گوید برای اثبات $P \vee Q$ ، می‌توان از فرض ~P به Q رسید.

۳. قاعده حذف ∨ می‌گوید که اگر همه اقسام، مستلزم یک نتیجه باشند آن نتیجه نمی‌تواند کاذب باشد. این قیاس را ابن‌سینا «قیاس مقسم» نامیده است. شکل کامل این قیاس‌ها به صورت زیر است:

قیاس افتراض

m	(m)	$\sim Q$
⋮	⋮	⋮
i,j,m	(n)	P
i,j	(n+1)	$P \vee Q$

قیاس افتراض

m	(m)	$\sim P$
⋮	⋮	⋮
i,j,m	(n)	Q
i,j	(n+1)	$P \vee Q$

قیاس مقسم

حذف $\vee$

	f,g	(k)	$P \vee Q$
	m	(m)	P
	⋮	⋮	⋮
	i,m	(n)	R
	n+1	(n+1)	Q
	⋮	⋮	⋮
	j,n+1	(o)	R
$\therefore$	f,g,i,j	(o+1)	R

۴. در قیاس افتراض، نتیجه بر فرض‌های سطر آخر برهانک استوار است مگر بر فرض برهانک.

۵. در قیاس مقسم، نتیجه بر فرض‌های مقدمه فصلی و فرض‌های سطرهای آخر دو برهانک استوار است مگر فرض‌های دو برهانک.

برخی از قواعد معتبر در منطق کلاسیک

شرطی	وضع مقدم، دلیل شرطی، قیاس شرطی (شکل اول)		كذب مقدم $\begin{array}{c} \sim P \\ \hline P \to Q \end{array}$ صدق تالی $\begin{array}{c} Q \\ \hline P \to Q \end{array}$ شرکت‌پذیری $\begin{array}{c} (P \to Q) \to R \\ \hline P \to (Q \to R) \end{array}$ $\begin{array}{c} P \\ \hline\hline (P \to Q) \to P \end{array}$ $\begin{array}{c} (P \to Q) \to Q \\ \hline\hline (Q \to P) \to P \end{array}$
دوشرطی	وضع مقدم، وضع تالی، رفع مقدم، رفع تالی، دلیل شرطی، قیاس شرطی (همه شکل‌ها)	تعادل ۱ $\begin{array}{c} P \leftrightarrow Q \\ \hline\hline (\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q) \end{array}$ تعادل ۲ $\begin{array}{c} P \leftrightarrow Q \\ \hline\hline (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q) \end{array}$	كذب طرفین $\begin{array}{c} \sim P \wedge \sim Q \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array}$ صدق طرفین $\begin{array}{c} P \wedge Q \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array}$ شرکت‌پذیری $\begin{array}{c} (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \\ \hline\hline P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \end{array}$ $\begin{array}{c} Q \\ \hline\hline (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P \end{array}$ $\begin{array}{c} P \\ \hline\hline (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow Q \end{array}$
ناقض	رفع تالی، عکس نقیض، برهان خلف و نقض مضاعف	$\begin{array}{c} P \leftrightarrow \sim Q \\ \hline\hline \sim(P \leftrightarrow Q) \end{array}$	
عاطف و فاصل	تکرار، جابجایی، شرکت‌پذیری، پخش‌پذیری، ذوالوجهین مثبت: $\begin{array}{l} (P \to Q) \wedge (R \to S) \\ P \vee R \\ \hline Q \vee S \end{array}$ تالی عطفی: $\begin{array}{c} P \to (Q \wedge R) \\ \hline\hline (P \to Q) \wedge (P \to R) \end{array}$ مقدم فصلی: $\begin{array}{c} (P \vee Q) \to R \\ \hline\hline (P \to R) \wedge (Q \to R) \end{array}$	صدور: $\begin{array}{l} P \to (Q \to R) \\ \hline\hline (P \wedge Q) \to R \end{array}$ جذب ۱: $\begin{array}{l} P \to (P \wedge Q) \\ \hline\hline P \to Q \end{array}$ جذب ۲: $\begin{array}{l} (P \vee Q) \to Q \\ \hline\hline P \to Q \end{array}$ مقدم عطفی: $\begin{array}{l} (P \wedge Q) \to R \\ \hline\hline (P \to R) \vee (Q \to R) \end{array}$ تالی فصلی: $\begin{array}{l} P \to (Q \vee R) \\ \hline\hline (P \to Q) \vee (P \to R) \end{array}$	$\begin{array}{c} P \to Q \\ P \vee Q \\ \hline Q \end{array}$ $\begin{array}{c} P \vee Q \\ \hline\hline (P \to Q) \to Q \end{array}$ $\begin{array}{c} P \vee Q \\ \hline\hline (Q \to P) \to P \end{array}$
عاطف، فاصل و ناقض	دمورگان، ذوالوجهین منفی: $\begin{array}{l} (P \to Q) \wedge (R \to S) \\ \sim Q \vee \sim S \\ \hline \sim P \vee \sim R \end{array}$	استلزام ۱ $\begin{array}{l} P \to Q \\ \hline\hline \sim P \vee Q \end{array}$ استلزام ۲ $\begin{array}{l} P \to Q \\ \hline\hline \sim(P \wedge \sim Q) \end{array}$	قیاس انفصالی $\begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$ EFQ $\begin{array}{c} P \wedge \sim P \\ \hline Q \end{array}$ EQT $\begin{array}{c} P \\ \hline Q \vee \sim Q \end{array}$ هم‌توانی تناقضات $\begin{array}{c} P \wedge \sim P \\ \hline\hline Q \wedge \sim Q \end{array}$ هم‌توانی قضایا $\begin{array}{c} P \vee \sim P \\ \hline\hline Q \vee \sim Q \end{array}$

قواعد استنتاج طبیعی در منطق ربط

برای اینکه قواعد منطق ربط را به دست آوریم، کافی است برخی از قواعد را محدود کنیم و برخی دیگر را کمی تعمیم دهیم. یکی از مهم‌ترین محدودیت‌ها این است که برهانک‌ها را ربطی بسازیم. اگر فرض یک برهانک هیچ نقشی در اثبات سطر آخر آن نداشته باشد می‌فهیم که سطر آخر را بدون فرض این برهانک نیز می‌توانستیم به دست بیاوریم. این نشان می‌دهد که در این وضعیت، سطر آخر برهانک هیچ ربطی به فرض آن ندارد و کاربرد قواعد مربوط به برهانک در این موارد جز مغالطه و سفسطه چیز دیگری نمی‌تواند باشد. برای نمونه، به این برهان توجه کنید که به روش برهانک نوشته شده است (شماره فرض‌ها نوشته نشده است):

$$\frac{P \wedge \sim P}{Q}$$

مقدمه	1	$P \wedge \sim P$
فرض	2	$\sim Q$
حذف عاطف ۱	3	P
حذف عاطف ۲	4	$\sim P$
معرفی عاطف ۳ و ۴	5	$P \wedge \sim P$
برهان خلف ۲ تا ۵	6	$\sim\sim Q$
نقض مضاعف ۶	7	Q

این استدلال یک استدلال درست در منطق کلاسیک است و هیچ مغالطه‌ای در آن به نظر نمی‌رسد. حال اگر شماره فرض‌ها را هم بنویسیم به یک مغالطه برخواهیم خورد:

$$\frac{P \wedge \sim P}{Q}$$

مقدمه	1	$P \wedge \sim P$	1
فرض	2	$\sim Q$	2
حذف عاطف ۱	3	P	1
حذف عاطف ۲	4	$\sim P$	1
معرفی عاطف ۳ و ۴	5	$P \wedge \sim P$	1
برهان خلف ۲ تا ۵	6	$\sim\sim Q$	1
نقض مضاعف ۶	7	Q	1

با نگاه به سطر پنجم، می‌بینیم که این سطر تنها بر سطر اول استوار است و به هیچ وجه از سطر دوم که فرض برهانک است استنتاج نشده است. اکنون واضح است که برهان خلف در سطر ششم یک مغالطه است زیرا فرض برهانک ما را به تناقض سطر پنجم نرسانده بود تا از این واقعیت کذب سطر دوم را بتوانیم نتیجه بگیریم. تناقض سطر آخر برهانک ناشی از مقدمه است و هیچ ارتباطی به فرض برهانک ندارد و به همین دلیل، برهان خلف در سطر ششم مغالطه آمیز است.

بر این اساس، به یک قاعده کلی می‌رسیم:

قاعده کاربرد: سطر آخر برهانک باید بر فرض برهانک استوار باشد (به عبارت دیگر، شماره سطر اول برهانک، باید، یکی از شماره‌فرض‌های سطر آخر آن برهانک باشد.

در منطق کلاسیک، یکی از شگردهای دور زدن قاعده کاربرد و خنثی کردن این قاعده مهم، این است که قاعده معرفی عاطف را بر فرض برهانک و یکی از مقدمات مورد نیاز اعمال کرده و با حذف عاطف مشکل را از میان بر می‌دارند. برای نمونه، برهان مغالطه‌آمیز بالا به صورت زیر اصلاح می‌شود:

$$\frac{P \wedge \sim P}{Q}$$

1	1	$P \wedge \sim P$	مقدمه
2	2	$\sim Q$	فرض
1, 2	3	$(P \wedge \sim P) \wedge \sim Q$	معرفی عاطف ۱ و ۲
1, 2	4	$P \wedge \sim P$	حذف عاطف ۳
1	5	$\sim\sim Q$	برهان خلف ۲ تا ۴
1	6	Q	نقض مضاعف ۵

چنان‌که می‌بینیم، سطرهای ۱ و ۲ در سطر سوم ترکیب عطفی شده‌اند و به همین دلیل، این سطر بر هر دو سطر ۱ و ۲ استوار است. اکنون با حذف عاطف، به سطر چهار می‌رسیم که بر سطرهای ۱ و ۲ استوار است. اکنون، سطر آخر برهانک بر فرض برهانک استوار است و این نشان می‌دهد که فرض برهانک سبب رسیدن به تناقض شده و از این رو، خود گزاره‌ای کاذب است. پس کاربرد قاعده برهان خلف، اکنون، بدون هر گونه ایرادی است.

واضح است که با این شگرد، نمی‌توان ذهن منتقدین را آرام کرد. آوردن یک تناقض از بیرون برهانک و چسباندن فرض به آن و کنار گذاشتن آن فرض، به هیچ وجه نمی‌تواند دلیل خوبی برای این باشد که این فرض تناقض آمیز است و باید کاذب باشد. این نشان می‌دهد که یا قاعده معرفی عاطف ایراد دارد یا قاعده حذف عاطف. هر دو قاعده بسیار بدیهی می‌نمایند و کنار گذاشتن هر یک به همان اندازه مخالف با شهودهای منطق ماست که استنتاج هر چیز از تناقض. به وضعیت بغرنجی گرفتار آمده‌ایم. یا باید قاعده ضد شهودی «استنتاج هر چیز از تناقض» را بپذیریم یا یکی از قاعده‌های کاملا شهودی «معرفی عاطف» یا «حذف عاطف» را انکار کنیم.

در بیشتر پارادوکس‌های مشابه که بدیهیات با هم به تعارض می‌افتند، چاره کار در این است که به جای انکار کامل یکی از بدیهیات، به محدود کردن یکی از بدیهیات اکتفا می‌کنیم. معمولا، این شگرد مؤثر می‌افتد و نکته اصلی پارادوکس را نیز نشان می‌دهد. از سه قاعده مذکور، یعنی معرفی عاطف، حذف عاطف و استنتاج هر چیز از تناقض، تنها قاعده اول است که دو مقدمه‌ای است و دو قاعده دیگر تک مقدمه‌ای هستند و به نظر نمی‌رسد که بتوان به طریقی آنها را محدود کرد. پس به ناچار قاعده معرفی عاطف را در نظر می‌گیریم تا ببینیم آیا می‌توان به طریقی آن را محدود کرد. این قاعده به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\begin{array}{c}P\\Q\end{array}}{P \wedge Q}$$

اما صورت کامل‌تر آن به صورت زیر است:

شماره فرض	
i, j, k	P
m, n	Q
i, j, k, m, n	$P \wedge Q$

یعنی برای نتیجه، شماره‌فرض‌های دو مقدمه را باید کنار هم بنویسیم. این قاعده را می‌توان به صورت زیر محدود کرد: فرض‌های مقدمه‌ها در معرفی عاطف باید یکسان باشند:

شماره فرض	
i, j, k	P
i, j, k	Q
i, j, k	$P \wedge Q$

با این ترفند، می‌توان جلوی استنتاج هر چیز از تناقض را بگیریم: در آخرین برهانی که برای این استدلال آوردیم، سطر اول و دوم را معرفی عاطف کردیم در حالی که شماره فرض‌های این دو فرمول یکسان نبود: یکی مبتنی بر فرض ۱ بود و دیگری مبتنی بر فرض ۲. پس با محدودیت گفته شده در بالا، دیگر این معرفی عاطف را نمی‌توان انجام داد و به نتیجه ضد شهودی استنتاج هر چیز از تناقض رسید.

اما سؤالی که اینجا مطرح می‌شود این است که آیا این محدودیت یک پاسخ مقطعی و ad hoc نیست؟ آیا این محدودسازی به طور ریشه‌ای مشکل را حل کرده است یا اینکه به طور موقت و جزیی تنها این برهان را ناکارآمد می‌سازد؟ به تعبیر فلاسفه خودمان، آیا محدودیتِ معرفی عاطف، پاسخی حلّی به استنتاج هر چیز از تناقض است؟

پاسخ همه این سؤال‌ها مثبت است. همان‌طور که گفتیم، غالبا، این محدودسازی‌ها پاسخی تحلیلی را نیز به دست می‌دهد: به آخرین برهانی که برای «استنتاج هر چیز از تناقض» آوردیم توجه کنید. سطر سوم می‌گوید که فرمول $(P \wedge \sim P) \wedge \sim Q$ مبتنی بر هر دو سطر اول و دوم است. این سخن نادرست است زیرا هر چند بخش اول این فرمول بر سطر اول استوار است و بخش دوم آن بر سطر دوم، کل این فرمول بر هر دو سطر استوار نیست زیرا در این صورت، هر دو جزء آن بر هر دو سطر اول و دوم استوار می‌شد؛ برای نمونه، $(P\wedge\sim P)$ بر سطر دوم، یعنی بر $\sim Q$، استوار می‌شد و $\sim Q$ بر $(P \wedge \sim P)$. مبتنی شدن $(P \wedge \sim P)$ بر $\sim Q$ به طور بدیهی باطل است. $\sim Q$، به هیچ وجه، درون خود تناقضی در بر ندارد و استناد تناقض به آن امری کاملا باطل است.

به طور کلی، اگر دو فرمول را که بر دو فرض مختلف استوار هستند بخواهیم با هم ترکیب عطفی کنیم و حاصل را مبتنی بر هر دو فرض بدانیم، به این معنی است که هر کدام از دو فرمول مبتنی بر فرض دیگری است و این نتیجه می‌دهد که هر فرمولی را می‌توان بر هر چیزی مبتنی کرد:

P	1	P	فرض
Q	2	Q	فرض
P , Q	3	$P \wedge Q$	معرفی نامحدود عاطف ۱ و ۲
P , Q	4	P	حذف عاطف ۳
P , Q	5	Q	حذف عاطف ۳

چنان‌که می‌بینیم، در سطر ۴، P بر Q استوار است و در سطر ۵، Q بر P . واضح است که هر دو فرمول را نمی‌توان بر هم استوار دانست و بی‌ربط بودن بسیاری از گزاره‌ها نسبت به یک دیگر امری کاملا شهودی است. در برهان بالا، معرفی نامحدود عاطف سبب این مغالطه گشته است. بر این اساس، با اطمینان، می‌توان قاعده ربطی زیر را وضع کرد:

قاعده معرفی محدود عاطف: تنها فرمول‌هایی را می‌توان معرفی عاطف کرد که بر فرض‌های یکسانی استوار باشند.

از آنجا که فاصل مزدوج عاطف است و هر یک بر اساس دیگری قابل تعریف است نتیجه می‌گیریم که محدودیت مشابهی را باید برای فاصل در نظر بگیریم. قاعده معرفی فاصل مانند قاعده حذف عاطف قاعده‌ای بسیار ساده و تک‌مقدمه‌ای است و به نظر می‌رسد نمی‌توان آن را محدود ساخت؛ اما؛ قاعده حذف فاصل قاعده‌ای است پیچیده و دارای دو مقدمه برهانکی و یک مقدمه فصلی و از این رو، به نظر می‌رسد بتوان آن را به نحوی محدود ساخت. قاعده حذف فاصل به صورت نامحدود چنین است:

قیاس مقسم

حذف $\vee$

	f, g	(k)	$P \vee Q$
	m	(m)	P
	⋮	⋮	⋮
	i, m	(n)	R
	n+1	(n+1)	Q
	⋮	⋮	⋮
	j, n+1	(o)	R
$\therefore$	f, g, i, j	(o+1)	R

قاعده حذف محدود فاصل: در حذف فاصل، سطرهای آخر دو برهانک باید بر فرض‌های یکسانی استوار باشند مگر در فرض‌های دو برهانک.

بر اساس این محدودیت، قاعده حذف فاصل به صورت زیر در می‌آید:

حذف ربطی $\vee$

حذف محدود $\vee$

f, g	(k)	$P \vee Q$
m	(m)	P
⋮	⋮	⋮
i, j, m	(n)	R
n+1	(n+1)	Q
⋮	⋮	⋮
i, j, n+1	(o)	R
∴ f, g, i, j	(o+1)	R

برای اینکه تأثیر این محدودسازی را ببینیم کافی است دو صورت قاعده «ذوالوجهین مثبت» و برهان آنها را در نظر بگیریم:

ذوالوجهین مثبت (ربطی)

شکل اول (قابل اثبات)

$(P \to Q) \wedge (R \to S)$

$P \vee R$

$Q \vee S$

1	1	$(P \to Q) \wedge (R \to S)$	مقدمه
2	2	$P \vee R$	مقدمه
3	3	P	فرض
1	4	$P \to Q$	حذف عاطف ۱
1, 3	5	Q	وضع مقدم ۳ و ۴
1, 3	6	$Q \vee S$	معرفی فاصل ۵
7	7	R	فرض
1	8	$R \to S$	حذف عاطف ۱
1, 7	9	S	وضع مقدم ۷ و ۸
1, 7	10	$Q \vee S$	معرفی فاصل ۹
1	11	$Q \vee S$	حذف فاصل ۲ و ۳ – ۶ و ۷ – ۱۰

ذوالوجهین مثبت (غیر ربطی)

شکل دوم (غیر قابل اثبات)

$P \to Q$

$R \to S$

$P \vee R$

$Q \vee S$

1	1	$P \to Q$	مقدمه
2	2	$R \to S$	مقدمه
3	3	$P \vee R$	مقدمه
4	4	P	فرض
1, 4	5	Q	وضع مقدم ۱ و ۴
1, 4	6	$Q \vee S$	معرفی فاصل ۵
7	7	R	فرض
2, 7	8	S	وضع مقدم ۷ و ۲
2, 7	9	$Q \vee S$	معرفی فاصل ۸
1	10	$Q \vee S$	حذف فاصل ۳ و ۴ – ۶ و ۷ – ۹

چنان‌که می‌بینیم، در برهان سمت راست، فرض‌های سطر آخر دو برهانک با هم مساوی هستند (مگر در فرض‌های ۳ و ۷) اما در برهان سمت چپ، فرض‌های سطر آخر دو برهانک با هم مساوی نیستند (سطر ۶ مبتنی بر مقدمه اول و

سطر ۹ مبتنی بر مقدمه دوم است.) به همین دلیل، برهان راست از نظر منطق ربط معتبر است اما برهان چپ از نظر منطق ربط نامعتبر است. توجه کنید که نمی‌توان با ترکیب عطفی دو مقدمه اول از برهان چپ، به ذوالوجهین سمت راست رسید و ذوالوجهین سمت چپ را معتبر ساخت زیرا همان طور که در قاعده معرفی عاطف گفتیم، مقدمه‌ها باید بر فرض‌های یکسانی استوار باشند تا بتوانیم قاعده معرفی عاطف را بر آنها اعمال کنیم.

اعمال قاعده‌های سه گانه بالا، همه قواعد غیر ربطی را غیر معتبر می‌سازد اما در عوض، بعضی از قواعدی که از نظر منطق ربط هیچ ایرادی ندارند، با به کار بردن قاعده‌های سه‌گانه، دیگر قابل اثبات نخواهند بود. برای نمونه، اثبات قاعده رفع تالی به کمک برهان خلف دیگر ممکن نیست. به برهان رفع تالی در منطق کلاسیک توجه کنید:

1	1	$P \to Q$	مقدمه
2	2	$\sim Q$	مقدمه
3	3	P	فرض
1 , 3	4	Q	وضع مقدم ۱ و ۳
1 , 2 , 3	5	$Q \wedge \sim Q$	م ∧ ۲ و ۴
1 , 2	6	$\sim P$	برهان خلف ۳ تا ۵

قاعده رفع تالی

$$\frac{P \to Q \qquad \sim Q}{\sim P}$$

چنان که می‌بینیم، معرفی عاطف در سطر ۵ بر سطرهای ۲ و ۴ اعمال شده که از فرض‌های یکسانی برخوردار نیستند. با این وجود، قاعده رفع تالی قاعده صحیحی به نظر می‌رسد. هم‌چنین، به نظر نمی‌رسد که فرض P در رسیدن به تناقض کاملا بی‌تأثیر بوده باشد. به همین دلیل، ناگزیریم دو قاعده جدید را به این منطق بیفزاییم. دقت کنید که افزودن این دو قاعده به معنای نادرستی محدودیت‌های اعمال شده توسط سه قاعده قبلی نیست. این به دلیل ویژگی‌های خاص نظام‌های استنتاج طبیعی است که محدودیت‌های سه‌گانه بیش از حد سخت‌گیرانه از آب در آمدند. منطق‌دانان ربط، با تأسیس نظام‌های استنتاج طبیعی دیگری، توانسته‌اند از این سخت‌گیری‌ها بکاهند که بعدا به آن خواهیم رسید.

دو قاعده جدید عبارتند از :

قاعده معرفی عاطف در برهان خلف: برای رسیدن به تناقض، تنها در سطر آخر برهانک خلف، معرفی عاطف را می‌توان بر دو فرمول با فرض‌های نایکسان اعمال کرد.

می‌توان این قاعده را قیدی بر قاعده معرفی محدود عاطف دانست و آن دو را به صورت یک‌پارچه به صورت زیر بیان کرد:

قاعده معرفی محدود عاطف: تنها فرمول‌هایی را می‌توان معرفی عاطف کرد که بر فرض‌های یکسانی استوار باشند مگر اینکه برای رسیدن به تناقض در سطر آخر برهانک خلف باشد.

قاعده جدید دیگر، مربوط به پخش‌پذیری عاطف بر فاصل است.

پخش‌پذیری عاطف بر فاصل

بسیاری از قوانین عاطف و فاصل، در منطق کلاسیک، برهانی دارند که شرط یکسانی فرض‌ها در دو قاعده معرفی عاطف و حذف فاصل را مراعات می‌کنند و از این نظر، دچار هیچ مشکلی نمی‌شوند. برخی از این قوانین عبارتند از:

تکرار (= خودتوانی)

$P \leftrightarrow P \wedge P$

$P \leftrightarrow P \vee P$

$P \wedge P \leftrightarrow P \vee P$

جابجایی

$P \wedge Q \leftrightarrow Q \wedge P$

$P \vee Q \leftrightarrow Q \vee P$

شرکت‌پذیری

$P \wedge (Q \wedge R) \leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$

$P \vee (Q \vee R) \leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$

پخش‌پذیری فاصل بر عاطف $P \vee (Q \wedge R) \rightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

عکس پخش‌پذیری عاطف بر فاصل $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R) \rightarrow P \wedge (Q \vee R)$

با وجود این، برهان پخش‌پذیری عاطف بر فاصل، از محدودیت‌های قواعد عاطف و فاصل پیروی نمی‌کند. هم‌چنین، عکس پخش‌پذیری فاصل بر عاطف و نوع ضعیفی از پخش‌پذیری نیز دچار نقص گفته شده هستند و برهان کلاسیک آنها در منطق ربط، برهان محسوب نمی‌شود. این سه نوع پخش‌پذیری عبارتند از:

پخش‌پذیری عاطف بر فاصل $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

عکس پخش‌پذیری فاصل بر عاطف $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \rightarrow P \vee (Q \wedge R)$

پخش‌پذیری ضعیف $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \vee R$

قاعده پخش‌پذیری از نظر منطق ربط درست است اما با محدود کردن قاعده معرفی عاطف بر فرمول‌های با فرض یکسان، دیگر نمی‌توان پخش‌پذیری عاطف بر فاصل را اثبات کرد. به برهان پخش‌پذیری در منطق کلاسیک توجه کنید:

عکس پخش‌پذیری عاطف بر فاصل

$$\frac{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}{P \wedge (Q \vee R)}$$

$$\frac{P \wedge (Q \vee R)}{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$$

پخش‌پذیری عاطف برفاصل

$$\frac{P \wedge (Q \vee R)}{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$$

1	1	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	مقدمه
2	2	$P \wedge Q$	فرض
2	3	P	ح ∧ ۲
2	4	Q	ح ∧ ۲
2	5	$Q \vee R$	م ∨ ۴
2	6	$P \wedge (Q \vee R)$	م ∧ ۳ و ۵
7	7	$P \wedge R$	فرض
7	8	P	ح ∧ ۷
7	9	R	ح ∧ ۷
7	10	$Q \vee R$	م ∨ ۹
7	11	$P \wedge (Q \vee R)$	م ∧ ۸ و ۱۰
1	12	$P \wedge (Q \vee R)$	

ح ∨ ۱ و ۲ – ۶ و ۷ – ۱۱

1	1	$P \wedge (Q \vee R)$	مقدمه
1	2	P	ح ∧ ۱
1	3	$Q \vee R$	ح ∧ ۱
4	4	Q	فرض
1, 4	5	$P \wedge Q$	م ∧ ۲ و ۴
1, 4	6	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	م ∨ ۵
7	7	R	فرض
1, 7	8	$P \wedge R$	م ∧ ۲ و ۷
1, 7	9	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	م ∨ ۸
1	10	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	

ح ∨ ۳ و ۴ – ۶ و ۷ – ۹

چنان که می‌بینیم، در برهان سمت چپ برای پخش‌پذیری عاطف بر فاصل، قاعده معرفی عاطف در سطرهای ۵ و ۸ بر فرمول‌هایی اعمال شده است که فرض‌های یکسانی ندارند و به همین دلیل، قاعده محدود معرفی عاطف را بر نمی‌تابند.

حال که برهان کلاسیک دو طرف پخش‌پذیری عاطف بر فاصل را بررسی کردیم، برهان دو طرف پخش‌پذیری فاصل برعاطف را نیز مورد بررسی قرار دهیم:

عکس پخش‌پذیری فاصل بر عاطف		پخش‌پذیری فاصل بر عاطف
$\dfrac{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}{P \vee (Q \wedge R)}$	$\dfrac{P \vee (Q \wedge R)}{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}$	$\dfrac{P \vee (Q \wedge R)}{(P \vee Q) \wedge (P \vee R)}$

1	1	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	مقدمه
1	2	$P \vee Q$	ح ∧ (۱)
1	3	$P \vee R$	ح ∧ (۱)
4	4	P	فرض
4	5	$P \vee (Q \wedge R)$	م ∨ ۴
6	6	Q	فرض
7	7	P	فرض
7	8	$P \vee (Q \wedge R)$	م ∨ (۷)
9	9	R	فرض
6 , 9	10	$Q \wedge R$	م ∧ (۶ و ۹)
6 , 9	11	$P \vee (Q \wedge R)$	م ∨ (۱۰)
6	12	$P \vee (Q \wedge R)$	ح ∨ ۳ و ۷ – ۸ و ۹ – ۱۱
1	13	$P \vee (Q \wedge R)$	ح ∨ ۲ و ۴ – ۵ و ۶ – ۱۲

1	1	$P \vee (Q \wedge R)$	مقدمه
2	2	P	فرض
2	3	$P \vee Q$	م ∨ (۲)
2	4	$P \vee R$	م ∨ (۲)
2	5	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	م ∧ (۳ و ۴)
6	6	$Q \wedge R$	فرض
6	7	Q	ح ∧ (۶)
6	8	R	ح ∧ (۶)
6	9	$P \vee Q$	م ∨ (۷)
6	10	$P \vee R$	م ∨ (۸)
6	11	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	م ∧ (۹ و ۱۰)
1	12	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	ح ∨ ۱ و ۲ – ۵ و ۶ – ۱۱

چنان که می‌بینیم، پخش‌پذیری فاصل بر عاطف (برهان سمت چپ) بدون هیچ ایرادی از نظر منطق ربط صحیح است؛ اما برهان عکس آن نه محدودیت قاعده معرفی عاطف را مراعات کرده است نه محدودیت قاعده حذف فاصل را. سطر دهم، معرفی عاطف را بر سطرهای ۶ و ۹، که فرض‌ها متفاوتی دارند، به کار برده است. همچنین، قاعده حذف فاصل در سطر ۱۲ بر دو برهانک اعمال شده است که فرض‌های سطر آخر آنها، جدای از فرض‌های دو برهانک، متفاوت است.

از آنجا که منطق‌دانان ربط همه قواعد پخش‌پذیری را خالی از هرگونه عیب و نقص می‌بینند و از سویی دیگر، محدودیت‌های پیش‌گفته اثبات برخی را با اشکال مواجه می‌سازد چاره کار را در افزودن این قواعد به عنوان قواعد اصلی دیده‌اند.

قاعده پخش‌پذیری: قاعده پخش‌پذیری عاطف بر فاصل به عنوان قاعده‌ای دو طرفه (و لذا قابل اعمال بر جزء فرمول) در منطق ربط به کار می‌رود.

به جای قاعده پخش‌پذیری عاطف بر فاصل، می‌توانستیم عکس پخش‌پذیری فاصل بر عاطف و یا حتی پخش‌پذیری ضعیف را نیز به عنوان قاعده اصلی بگیریم و دو قاعده دیگر را بر اساس آن اثبات کنیم:

پخش‌پذیری عاطف بر فاصل $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

عکس پخش‌پذیری فاصل بر عاطف $(P \vee Q) \wedge (P \vee R) \rightarrow P \vee (Q \wedge R)$

پخش‌پذیری ضعیف $P \wedge (Q \vee R) \rightarrow (P \wedge Q) \vee R$

هر یک از این سه قاعده، دو تای دیگر را اثبات می‌کند. برهان پخش‌پذیری ضعیف به کمک هر یک از دو قاعده دیگر آسان است اما برهان آن دو قاعده به کمک پخش‌پذیری ضعیف کمی دشوارتر است. از این رو، تنها این برهان‌ها را ذکر می‌کنیم. توجه کنید که از قاعده جابجایی فاصل سود جسته‌ایم:

برهان پخش‌پذیری عاطف بر فاصل به کمک پخش‌پذیری ضعیف

1	1	$P \wedge (Q \vee R)$	مقدمه
1	2	$(P \wedge Q) \vee R$	پخش‌پذیری ضعیف (۱)
1	3	$R \vee (P \wedge Q)$	جابجایی $\vee$ (۲)
1	4	P	حذف $\wedge$ (۱)
1	5	$P \wedge [R \vee (P \wedge Q)]$	معرفی $\wedge$ (۳ و ۴)
1	6	$(P \wedge R) \vee (P \wedge Q)$	پخش‌پذیری ضعیف (۵)
1	7	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	جابجایی $\vee$ (۶)

در برهان زیر، قاعده‌های جابجایی فاصل و عاطف، هر دو، به کار می‌آیند:

برهان پخش‌پذیری فاصل بر عاطف به کمک پخش‌پذیری ضعیف

1	1	$(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	مقدمه
1	2	$(P \vee Q) \wedge (R \vee P)$	جابجایی $\vee$ (۱)
1	3	$[(P \vee Q) \wedge R] \vee P$	پخش‌پذیری ضعیف (۲)
4	4	$(P \vee Q) \wedge R$	فرض
4	5	$R \wedge (Q \vee P)$	جابجایی $\wedge$ و $\vee$ (۴)
4	6	$(R \wedge Q) \vee P$	پخش‌پذیری ضعیف (۵)

4	7	$P \vee (Q \wedge R)$	جابجایی ∧ و ∨ (۶)
8	8	P	فرض
8	9	$P \vee (Q \wedge R)$	معرفی ∨ (۸)
1	10	$P \vee (Q \wedge R)$	حذف ∨ (۳ و ۴ – ۷ و ۸ – ۹)

توجه کنید که ما ناچاریم برخی از قواعد پخش‌پذیری را به عنوان قاعده‌ای اصلی به منطق خود بیفزاییم و این، به هیچ وجه، نشان نمی‌دهد که محدودیت‌های پیش‌گفته نادرست هستند. منطق‌دانان ربط، مانند مایکل دان و گریگوری مینتس، نظام‌هایی را تأسیس کرده‌اند که علی رغم این محدودیت‌ها، همه قواعد پخش‌پذیری به صورت قاعده فرعی قابل اثبات هستند. برای نمونه، گزارشی از این نظام‌ها را در استیون رید ۱۹۸۸ ببینید. این نظام‌ها زبان کامل‌تری دارند که طرح آنها، از نظر آموزشی، فراگیری را برای نوآموزان منطق ربط دشوار می‌سازد. ما، در ادامه، نگاهی به این نظام‌ها خواهیم افکند.

اکنون، همه قواعد ربطی را با هم ذکر می‌کنیم تا سنجش آن‌ها به آسانی امکان پذیر باشد:

قواعد منطق ربط:

قاعده کاربرد:	سطر آخر برهانک باید بر فرض برهانک استوار باشد (به عبارت دیگر، شماره سطر اول برهانک، باید، یکی از شماره‌فرض‌های سطر آخر آن برهانک باشد.)
قاعده معرفی محدود عاطف:	تنها فرمول‌هایی را می‌توان معرفی عاطف کرد که بر فرض‌های یکسانی استوار باشند مگر اینکه برای رسیدن به تناقض در سطر آخر برهانک خلف باشد.
قاعده حذف محدود فاصل:	در حذف فاصل، سطرهای آخر دو برهانک باید بر فرض‌های یکسانی استوار باشند مگر در فرض‌های دو برهانک.
قاعده پخش‌پذیری:	قاعده پخش‌پذیری به عنوان قاعده‌ای دو طرفه (و لذا قابل اعمال بر جزء فرمول) در منطق ربط به کار می‌رود.

اثبات چند قضیه ربطی

برای نمونه، چند قضیه معتبر در منطق ربط را اثبات می‌کنیم:

اصل وجهی زدای D:
$A \to ((A \to A) \to A)$

1	1	A	فرض
2	2	$A \to A$	فرض
1 , 2	3	A	وم (۱و۲)
1	4	$(A \to A) \to A$	معرفی شرطی (۱و۳)
	5	$A \to ((A \to A) \to A)$	معرفی شرطی (۲و۴)

اصل اظهار C* :

$A \to ((A \to B) \to B)$

1	1	A	فرض
2	2	$A \to B$	فرض
1,2	3	B	وم (۱و۲)
1	4	$(A \to B) \to B$	معرفی شرطی (۱و۳)
	5	$A \to [(A \to B) \to B]$	معرفی شرطی (۲و۴)

اصل اظهار خاص C** :

$((A \to A) \to B) \to B$

1	1	$(A \to A) \to B$	فرض
2	2	A	فرض
	3	$(A \to A)$	معرفی شرطی (۲و۲)
1	4	B	وضع مقدم (۱و۳)
	5	$((A \to A) \to B) \to B$	معرفی شرطی (۱و۴)

چند قضیه غیر ربطی

همچنین، برای نمونه، اثبات چند قضیه در منطق کلاسیک را ذکر می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه در منطق ربط فاقد شرایط لازم هستند:

پارادوکس منفی:

$\sim A \to (A \to B)$

1	1	$\sim A$	فرض
2	2	A	فرض
3	3	$\sim B$	فرض
2, 3	4	$A \wedge \sim B$	معرفی عاطف (۲و۳)
2, 3	5	A	حذف عاطف (۴)
1, 2, 3	6	$A \wedge \sim A$	معرفی عاطف (۱و۵)
1, 2	7	$\sim\sim B$	معرفی ناقض (۳و۶)
1, 2	8	B	حذف ناقض (۷)
1	9	$A \to B$	معرفی شرطی (۲و۸)
	10	$\sim A \to (A \to B)$	معرفی شرطی (۱و۹)

اشکال در سطر چهارم است که معرفی عاطف از مقدماتی به دست آمده است که مفروضاتشان یکسان نیست. (همان طور که گفتیم، معرفی عاطف در سطر ششم در منطق ربط مجاز است.)

اصل پِرس P :
$((A \to B) \to A) \to A$

1	1	$(A \to B) \to A$	فرض
2	2	$\sim A$	فرض
	3	$\sim A \to (A \to B)$	پارادوکس منفی
2	4	$A \to B$	وضع مقدم (۲و۳)
1, 2	5	A	وضع مقدم (۱و۴)
1, 2	6	$A \wedge \sim A$	معرفی عاطف (۲و۵)
1	7	$\sim\sim A$	برهان خلف (۲و۶)
1	8	A	نقض مضاعف (۷)
	9	$((A \to B) \to A) \to A$	معرفی شرطی (۱و۸)

در این‌جا، در سطر ششم ایرادی نیست هرچند معرفی عاطف از مقدماتی به دست آمده است که مفروضاتشان یکسان نیست. ایراد اساسی در این است که از پارادوکس منفی استفاده شده است و این پارادوکس، چنان که در مثال قبل دیدیم، از نظر منطق ربط مردود است.

تمرین:

۱. قواعد عکس نقیض را در منطق کلاسیک اثبات کنید و ببیند آیا محدودیت‌های ربطی در آن برقرار است یا خیر.

۲. برهان کلاسیکِ دو طرف قاعده استلزام را از نظر ربطی یا غیر ربطی بودن آن بررسی کنید.

۳. قواعد دمورگان را در منطق کلاسیک اثبات کنید و ببیند آیا محدودیت‌های ربطی در آن برقرار است یا خیر.

۴. برهان قاعده پخش‌پذیری ضعیف را به کمک قاعده پخش‌پذیری عاطف بر فاصل را بنویسید.

۵. برهان قاعده پخش‌پذیری ضعیف را به کمک عکس پخش‌پذیری فاصل بر عاطف را بنویسید.

۶. برای قاعده پخش‌پذیری عاطف بر فاصل، برهانی بر مبنای اصلی بودن عکس قاعده پخش‌پذیری فاصل بر عاطف ارائه کنید.

۷. برای عکس قاعده پخش‌پذیری فاصل بر عاطف، برهانی بر مبنای اصلی بودن قاعده پخش‌پذیری عاطف بر فاصل ارائه کنید.

۸. پارادوکس‌های استلزام از بخش مقدمه را در منطق کلاسیک اثبات کنید و بگویید کدام سطر برهان در منطق ربط قابل اثبات نیست.

۹. قوانین شرطی، ناقض، عاطف و فاصل که در منطق ربط معتبرند در بخش روش اصل‌موضوعی آمده است. آن‌ها را یک بار در منطق کلاسیک و یک بار در منطق ربط اثبات کنید.

۱۰. در تمرین قبل، برهان‌هایی را که در دو منطق متفاوتند تعیین کنید و بگویید چرا چنین است.

۱۱. کدام یک از قضایای زیر در منطق ربط قابل اثبات است؟ آنها را اثبات کنید:

W	$(P \rightarrow (P \rightarrow Q)) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
W′	$(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$
CI	$P \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow Q)$
WB	$[(P \rightarrow Q) \wedge ((Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$
B	$(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R))$
CC	$Q \rightarrow [(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)]$
C	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (Q \rightarrow (P \rightarrow R))$
CB	$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$
BW′	$[P \rightarrow (Q \wedge (Q \rightarrow R))] \rightarrow (P \rightarrow R)$
CS	$(P \rightarrow Q) \rightarrow [(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)]$
S	$(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow [(P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)]$
P	$((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$
	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$
	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow R)$
	$P \vee (P \rightarrow Q)$
	$P \rightarrow (Q \vee (Q \rightarrow R))$
	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$
	$(P \rightarrow Q) \vee [(P \rightarrow R) \rightarrow (Q \rightarrow R)]$
	$[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \leftrightarrow ((P \vee Q) \rightarrow R)$
	$[(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)] \rightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$
	$(P \wedge Q) \rightarrow \{[(P \rightarrow R) \vee (Q \rightarrow R)] \rightarrow R\}$
	$(P \vee Q) \rightarrow \{[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow R\}$

۱۲. در جدول صفحه بعد، برخی از قواعد معتبر و نامعتبر منطق ربط، فهرست شده است. برهان کلاسیک هر قاعده را از نظر ربطی بودن یا نبودن بررسی کنید.

(استدلال‌های نیم معتبر و نیم نامعتبر، استدلال‌هایی هستند که دو طرف آنها در منطق کلاسیک معتبر است اما در منطق ربط، تنها یک طرف آنها معتبر است و طرف دیگرشان، دیگر، معتبر نیست. دلیل ذکر جداگانه این قواعد این است که آنها، در منطق کلاسیک، در جزء فرمول‌ها به کار می‌رفتند زیرا دو طرفه بودند اما در منطق ربط، چون یک طرفه هستند، در جزء فرمول نمی‌توانند اعمال شوند.)

وضعیت برخی از قواعد معتبر کلاسیک در منطق ربط

	معتبر	نیم معتبر	نیم نامعتبر	نامعتبر
شرطی	وضع مقدم، دلیل شرطی، قیاس شرطی (شکل اول)			کذب مقدم $\begin{array}{c} \sim P \\ \hline P \to Q \end{array}$ صدق تالی $\begin{array}{c} Q \\ \hline P \to Q \end{array}$ شرکت‌پذیری $\begin{array}{c} (P \to Q) \to R \\ \hline P \to (Q \to R) \end{array}$ $\begin{array}{c} P \\ \hline\hline (P \to Q) \to P \end{array}$ $\begin{array}{c} (P \to Q) \to Q \\ \hline\hline (Q \to P) \to P \end{array}$
دوشرطی	وضع مقدم، وضع تالی، رفع مقدم، رفع تالی، دلیل شرطی، قیاس شرطی (همه شکل‌ها)	تعادل ۱ $\begin{array}{c} P \leftrightarrow Q \\ \hline (\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q) \end{array}$ تعادل ۲ $\begin{array}{c} P \leftrightarrow Q \\ \hline (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q) \end{array}$	تعادل ۱ $\begin{array}{c} (\sim P \vee Q) \wedge (P \vee \sim Q) \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array}$ تعادل ۲ $\begin{array}{c} (P \wedge Q) \vee (\sim P \wedge \sim Q) \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array}$	کذب طرفین $\begin{array}{c} \sim P \wedge \sim Q \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array}$ صدق طرفین $\begin{array}{c} P \wedge Q \\ \hline P \leftrightarrow Q \end{array}$ شرکت‌پذیری $\begin{array}{c} (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \\ \hline\hline P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \end{array}$ $\begin{array}{c} Q \\ \hline\hline (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow P \end{array}$ $\begin{array}{c} P \\ \hline\hline (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow Q \end{array}$
ناقض	رفع تالی، عکس نقیض، برهان خلف و نقض مضاعف	$\begin{array}{c} P \leftrightarrow \sim Q \\ \hline \sim(P \leftrightarrow Q) \end{array}$	$\begin{array}{c} \sim(P \leftrightarrow Q) \\ \hline P \leftrightarrow \sim Q \end{array}$	
عاطف و فاصل	تکرار، جابجایی، شرکت‌پذیری، پخش‌پذیری، ذوالوجهین مثبت: $\begin{array}{l} (P \to Q) \wedge (R \to S) \\ P \vee R \\ \hline Q \vee S \end{array}$ تالی عطفی: $\begin{array}{c} P \to (Q \wedge R) \\ \hline\hline (P \to Q) \wedge (P \to R) \end{array}$ مقدم فصلی: $\begin{array}{c} (P \vee Q) \to R \\ \hline\hline (P \to R) \wedge (Q \to R) \end{array}$	صدور: $\begin{array}{c} P \to (Q \to R) \\ \hline (P \wedge Q) \to R \end{array}$ جذب ۱: $\begin{array}{c} P \to (P \wedge Q) \\ \hline P \to Q \end{array}$ جذب ۲: $\begin{array}{c} (P \vee Q) \to Q \\ \hline P \to Q \end{array}$ مقدم عطفی: $\begin{array}{c} (P \to R) \vee (Q \to R) \\ \hline (P \wedge Q) \to R \end{array}$ تالی فصلی: $\begin{array}{c} (P \to Q) \vee (P \to R) \\ \hline P \to (Q \vee R) \end{array}$	صدور: $\begin{array}{c} (P \wedge Q) \to R \\ \hline P \to (Q \to R) \end{array}$ جذب ۱: $\begin{array}{c} P \to Q \\ \hline P \to (P \wedge Q) \end{array}$ جذب ۲: $\begin{array}{c} P \to Q \\ \hline (P \vee Q) \to Q \end{array}$ مقدم عطفی: $\begin{array}{c} (P \wedge Q) \to R \\ \hline (P \to R) \vee (Q \to R) \end{array}$ تالی فصلی: $\begin{array}{c} P \to (Q \vee R) \\ \hline (P \to Q) \vee (P \to R) \end{array}$	$\begin{array}{c} P \to Q \\ P \vee Q \\ \hline Q \end{array}$ $\begin{array}{c} P \vee Q \\ \hline\hline (P \to Q) \to Q \end{array}$ $\begin{array}{c} P \vee Q \\ \hline\hline (Q \to P) \to P \end{array}$ ذوالوجهین مثبت شکل دوم: $\begin{array}{l} P \to Q \\ R \to S \\ P \vee R \\ \hline Q \vee S \end{array}$
عاطف، فاصل و ناقض	دمورگان، ذوالوجهین منفی: $\begin{array}{l} (P \to Q) \wedge (R \to S) \\ \sim Q \vee \sim S \\ \hline \sim P \vee \sim R \end{array}$	استلزام ۱ $\begin{array}{c} P \to Q \\ \hline \sim P \vee Q \end{array}$ استلزام ۲ $\begin{array}{c} P \to Q \\ \hline \sim(P \wedge \sim Q) \end{array}$	استلزام ۱ $\begin{array}{c} \sim P \vee Q \\ \hline P \to Q \end{array}$ استلزام ۲ $\begin{array}{c} \sim(P \wedge \sim Q) \\ \hline P \to Q \end{array}$	قیاس انفصالی $\begin{array}{l} P \vee Q \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$ EFQ $\begin{array}{c} P \wedge \sim P \\ \hline Q \end{array}$ EQT $\begin{array}{c} P \\ \hline Q \vee \sim Q \end{array}$ هم‌توانی تناقضات $\begin{array}{c} P \wedge \sim P \\ \hline\hline Q \wedge \sim Q \end{array}$ هم‌توانی قضایا $\begin{array}{c} P \vee \sim P \\ \hline\hline Q \vee \sim Q \end{array}$

تعریف نقض به استلزام محال

با داشتن تعریف نقیض به استلزام محال (یعنی تعریف $\sim P$ به $P \rightarrow \perp$) بسیاری از احکام ناقض را می‌توان، به کمک قاعده جانشینی، از احکام شرطی به دست آورد. برای نمونه، فرمول $[P \wedge (P \rightarrow Q)] \rightarrow Q$ که قاعده وضع مقدم شرطی را بیان می‌کند و W' نام دارد، با قاعده جانشینی، فرمول $[P \wedge (P \rightarrow \perp)] \rightarrow \perp$ را به دست می‌دهد که بنا به تعریف $\sim P$ به $P \rightarrow \perp$، فرمول $(P \wedge \sim P) \rightarrow \perp$ و لذا $\sim (P \wedge \sim P)$ را نتیجه می‌دهد که همان قانون نفی تناقض (NC) است.

در منطق شهودی مینیمال، همه احکام ناقض را می‌توان از احکام شرطی به دست آورد اما در منطق‌های شهودی، کلاسیک و ربط، این حکم صادق نیست؛ به عبارت دیگر، در منطق شهودی مینیمال، هر قضیه‌ای درباره ناقض، همتایی شرطی دارد و برعکس؛ اما در منطق‌های شهودی، کلاسیک و ربط، برخی قضیه‌های دارای ادات ناقض همتایی در قضیه‌های شهودی، کلاسیک و ربطی ندارند.

تعریف همتا: اگر A فرمولی دارای نماد ناقض و B فرمولی دارای نماد شرطی باشد، و با روش بالا (= جانشینی $\perp$ و به کاربردن تعریف ناقض) بتوان A را از روی B ساخت A را «همتای نقضیِ B» و B را «همتای شرطیِ A» می‌نامیم.

قضیه: برای هر A، یک همتای شرطی مانند B یافت می‌شود که A شهودی مینیمال است اتا B شهودی مینیمال باشد (قضیه بودن A شرط لازم و کافی برای قضیه بودن B است):

$\forall A \exists B[A$ همتای شرطیِ $=B \wedge (\vdash_{MJ} A \leftrightarrow \vdash_{MJ} B)]$

شرط لازمِ این دوشرطی در هیچ یک از منطق‌های شهودی، کلاسیک و ربط برقرار نیست: چنین نیست که اگر B توتولوژی باشد A نیز توتولوژی باشد، چنین نیست که اگر B شهودی باشد، A شهودی و یا حتی توتولوژی باشد و چنین نیست که اگر B ربطی باشد، A ربطی و یا حتی توتولوژی باشد:

$\sim\forall A \exists B[A$ همتای شرطیِ $=B \wedge (\vdash_{J} A \rightarrow \vdash_{J} B)]$

$\sim\forall A \exists B[A$ همتای شرطیِ $=B \wedge (\vdash_{K} A \rightarrow \vdash_{K} B)]$

$\sim\forall A \exists B[A$ همتای شرطیِ $=B \wedge (\vdash_{R} A \rightarrow \vdash_{R} B)]$

در جدول زیر، برخی از گزاره‌های شرطی و گزاره‌های ناقض را که همتای یکدیگرند با نام‌های معروفشان در چهار دسته گرد آورده‌ایم. فرمول‌هایی که در منطق شهودی مینیمال، شهودی یا ربط قضیه‌اند، به ترتیب با «MJ»، «J» و «R» و توتولوژی‌هایی که نه شهودی‌اند نه ربطی، با «T» و غیر توتولوژی‌ها (یعنی فرمول‌هایی که حتی قضیه منطق کلاسیک نیز نیستند) با «N» مشخص شده‌اند:

MJ = Minmal Intuitionist Teorem
J = Intuitionist Teorem
R = Relevant Teorem
T = just Totology

N = Non-Totology

	احکام ناقض	(A)	(B) احکام شرطی		
	CM	$(P \to \sim P) \to \sim P$	$(P \to (P \to Q)) \to (P \to Q)$	W	
	نفی تناقض (NC)	$\sim (P \land \sim P)$	$(P \land (P \to Q)) \to Q$	W′	
	معرفی نقض مضاعف	$P \to \sim\sim P$	$P \to ((P \to Q) \to Q)$	CI	
		$((P \to Q) \land \sim Q) \to \sim P$	$[(P \to Q) \land ((Q \to R)] \to (P \to R)$	WB	
R	رفع تالی	$\sim Q \to ((P \to Q) \to \sim P$	$(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$	B	R
		$Q \to ((P \to \sim Q) \to \sim P$	$Q \to [(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)]$	CC	
و	عکس نقیض	$(P \to \sim Q) \to (Q \to \sim P)$	$(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$	C	و
		$(P \to Q) \to (\sim Q \to \sim P)$	$(P \to Q) \to ((Q \to R) \to (P \to R))$	CB	
MJ		$(P \to (Q \land \sim Q)) \to \sim P$	$[P \to (Q \land (Q \to R))] \to (P \to R)$	BW′	MJ
	برهان خلف	$(P \to Q) \to ((P \to \sim Q) \to \sim P)$	$(P \to Q) \to [(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)]$	CS	
		$(P \to \sim Q) \to ((P \to Q) \to \sim P)$	$(P \to (Q \to R)) \to [(P \to Q) \to (P \to R)]$	S	
		$(\sim P \land \sim Q) \leftrightarrow \sim(P \lor Q)$	$[(P \to R) \land (Q \to R)] \leftrightarrow ((P \lor Q) \to R)$		
	دمورگان	$(\sim P \lor \sim Q) \to \sim(P \land Q)$	$[(P \to R) \lor (Q \to R)] \to ((P \land Q) \to R)$		
		$(P \land Q) \to \sim(\sim P \lor \sim Q)$	$(P \land Q) \to \{[(P \to R) \lor (Q \to R)] \to R\}$		
		$(P \lor Q) \to \sim(\sim P \land \sim Q)$	$(P \lor Q) \to \{[(P \to R) \land (Q \to R)] \to R\}$		
	CM′	$(\sim P \to P) \to P$	$((P \to Q) \to P) \to P$	P	T
	ثالث مطرود (EM)	$P \lor \sim P$	$P \lor (P \to Q)$		T
	حذف نقض مضاعف	$\sim\sim P \to P$	$((P \to Q) \to Q) \to P$		
		$((\sim P \to Q) \land \sim Q) \to P$	$[(P \to Q) \land ((Q \to R)] \to (P \to R)$		
	رفع تالی	$\sim Q \to ((\sim P \to Q) \to P$	$(Q \to R) \to ((P \to Q) \to (P \to R))$		
		$Q \to ((\sim P \to \sim Q) \to P$	$Q \to [(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)]$		
R	عکس نقیض	$(\sim P \to Q) \to (\sim Q \to P)$	$(P \to (Q \to R)) \to (Q \to (P \to R))$		N
		$(\sim P \to \sim Q) \to (Q \to P)$	$((Q \to R) \to (P \to R)) \to (P \to Q)$		
		$(\sim P \to (Q \land \sim Q)) \to P$	$[P \to (Q \land (Q \to R))] \to (P \to R)$		
	برهان خلف	$(\sim P \to Q) \to ((\sim P \to \sim Q) \to P)$	$(P \to Q) \to [(P \to (Q \to R)) \to (P \to R)]$		
		$(\sim P \to \sim Q) \to ((\sim P \to Q) \to P)$	$(P \to (Q \to R)) \to [(P \to Q) \to (P \to R)]$		
		$\sim(P \land Q) \to (\sim P \lor \sim Q)$	$((P \land Q) \to R) \to [(P \to R) \lor (Q \to R)]$		
	دمورگان	$\sim(\sim P \lor \sim Q) \to (P \land Q)$	$\{[(P \to R) \lor (Q \to R)] \to R\} \to (P \land Q)$		
		$\sim(\sim P \land \sim Q) \to (P \lor Q)$	$\{[(P \to R) \land (Q \to R)] \to R\} \to (P \lor Q)$		
	کذب مقدم	$\sim P \to (P \to Q)$	$(P \to R) \to (P \to Q)$		
J		$P \to (\sim P \to Q)$	$P \to ((P \to R) \to Q)$		N
	قیاس انفصالی	$((P \lor Q) \land \sim P) \to Q$	$((P \lor Q) \land (P \to R)) \to Q$		
	EFQ	$(P \land \sim P) \to Q$	$(P \land (P \to R)) \to Q$		
	EQT	$P \to (Q \lor \sim Q)$	$P \to (Q \lor (Q \to R))$		
T		$(P \to Q) \lor (P \to \sim Q)$	$(P \to Q) \lor (P \to (Q \to R))$		T
		$(P \to Q) \lor (\sim P \to \sim Q)$	$(P \to Q) \lor [(P \to R) \to (Q \to R)]$		
		$(P \to Q) \lor (\sim P \to Q)$	$(P \to Q) \lor ((P \to R) \to Q)$		N

صدق و کذب

صدق و کذب در منطق کلاسیک

بسیاری از منطق‌دانان برای صدق و کذب، جایگاهی در زبان منطقی و نظام برهانی خود در نظر نمی‌گیرند و تنها در مباحث سمانتیکی از آن سود می‌جویند. با این وجود، برخی منطق‌دانان کلاسیک، برای صدق و کذب، نمادهایی قرارداد و احکام آن را با اصول موضوعه یا قواعد خاصی بیان کرده‌اند. این دسته از منطق‌دانان، معمولا، یکی از نمادهای t، T و $\top$ را برای صدق و یکی از نمادهای f، F و $\bot$ را برای کذب به کار برده‌اند. ما، در این بخش، نمادهای T و F را برای این منظور به کار می‌بریم. ادات‌های صدق را گاهی «توتولوژی» و ادات‌های کذب را گاهی «تناقض» می‌نامند. ما از این نام‌ها نیز استفاده خواهیم کرد.

قواعد صدق و کذب در منطق کلاسیک

برای تناقض، هر یک از قواعد دو طرفه زیر می‌تواند همه احکام آن را به دست دهد؛ بنابراین، هر یک را می‌توان به عنوان قاعده اصلی در نظر گرفت و بقیه را به عنوان قاعده فرعی اثبات کرد. در قواعد یک طرفه، قاعده معرفی تناقض، با هر یک از دو قاعده حذف تناقض یا برهان خلف، می‌تواند سایر احکام تناقض را اثبات کند:

تعریف کذب به تناقض	تعریف کذب به تناقض	تعریف کذب به استلزام تناقض	معرفی تناقض	حذف تناقض	برهان خلف (معرفی ناقض)
$\dfrac{F}{\sim(P \to P)}$	$\dfrac{F}{P \wedge \sim P}$	$\dfrac{P \to F}{\sim P}$	$\dfrac{P \quad \sim P}{F}$	$\dfrac{F}{P}$	$\begin{array}{l} P \\ \vdots \\ F \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$

برای صدق و توتولوژی، نیز، هر یک از قواعد دو طرفه زیر می‌تواند همه احکام آن را به دست دهد؛ بنابراین، هر یک را می‌توان به عنوان قاعده اصلی در نظر گرفت و بقیه را به عنوان قاعده فرعی اثبات کرد. قاعده یک طرفه معرفی صدق، که معادل طرف پایین به بالای قواعد دو طرفه زیر است، می‌تواند با طرف بالا به پایین هر یک از این قواعد همه احکام صدق را اثبات کند. قضیه بودن صدق نیز همین حکم را دارد؛ یعنی معادل طرف پایین به بالای قواعد دو طرفه زیر است و می‌تواند با طرف بالا به پایین هر یک از این قواعد همه احکام صدق را اثبات کند:

تعریف صدق به توتولوژی	تعریف صدق به توتولوژی	تعریف صدق به استلزام از توتولوژی	معرفی صدق	قضیه بودن صدق
$\dfrac{T}{P \vee {\sim}P}$	$\dfrac{T}{P \to P}$	$\dfrac{P}{T \to P}$	$\dfrac{P}{T}$	T

تمرین:

۱. هر یک از قضایای زیر را در منطق کلاسیک اثبات کنید:

برخی از قضایای مربوط به صدق و کذب

T	$T \to (A \to A)$	$T \equiv (A \to A)$	$(T \vee A) \equiv T$	$A \equiv ((A \to F) \to F)$
${\sim}F$	$T \to (A \vee {\sim}A)$	$T \equiv (A \vee {\sim}A)$	$(F \wedge A) \equiv F$	$A \to ((T \wedge A) \equiv T)$
$T \equiv {\sim}F$	$(A \wedge {\sim}A) \to F$	$(A \wedge {\sim}A) \equiv F$	$(T \wedge A) \equiv A$	${\sim}A \to ((F \vee A) \equiv F)$
$F \equiv {\sim}T$	$(A \to A) \to T$		$(F \vee A) \equiv A$	$A \to ((T \vee A) \equiv A)$
$A \to T$	$(A \vee {\sim}A) \to T$	$(T \to A) \equiv A$	$(T \vee F) \equiv T$	${\sim}A \to ((F \wedge A) \equiv A)$
$F \to A$	$F \to (A \wedge {\sim}A)$	$(A \to F) \equiv {\sim}A$	$(T \wedge F) \equiv F$	
$F \to T$				

رابطه صدق و کذب

رابطه صدق و کذب در منطق کلاسیک به این صورت است که کذب قوی‌تر از صدق است و می‌تواند آن را نتیجه دهد. این نکته را به صورت زیر می‌توان نشان داد:

$$\begin{array}{c} F \\ | \\ | \\ T \end{array}$$

F قوی‌ترین فرمول و T ضعیف‌ترین فرمول است و قضایا هم‌ارز T و نقیض همه قضایا هم ارز F هستند و سایر فرمول‌ها میان T و F قرار دارند.

ترکیب عطفی و فصلی همه گزاره‌ها در منطق کلاسیک

اگر فرمول‌های نامتناهی را در زبان منطق خود مجاز بشماریم می‌توانیم ترکیب عطفی و فصلی همه قضایای منطق را بنویسیم. واضح است که هر یک از این دو فرمول نامتناهی هم ارز فرمول کوتاه T خواهد بود زیرا هر مؤلفه این فرمول نامتناهی معادل T است و ترکیب عطفیِ فرمول‌های معادل و نیز ترکیب فصلیِ آنها، نه از قوت آنها می‌کاهد و نه به توان آنها می‌افزاید.

از نظر سمانتیکی، اگر همه گزاره‌های صادق را در نظر بگیریم، (مقصود از «صادق» صادق در عالم واقع است، هرچند صادق در یک جهان ممکن دیگر و یا صادق در یک تعبیر و مدل خاص را نیز می‌توان اراده کرد،) همه این گزاره‌های صادق هم‌ارز توتولوژی‌ها و صدق‌های منطقی هستند و بنابراین ترکیب همه این گزاره‌های صادق، معادل t خواهد بود.

به همین صورت، می‌توانیم هم‌ارزی ترکیب عطفی و فصلی نقیض همه قضایای منطق را با F دریابیم. و با استدلال مشابه، نتیجه بگیریم که ترکیب عطفی و ترکیب فصلی همه گزاره‌های کاذب معادل با F هستند.

هم‌چنین، واضح است که اگر ترکیب عطفی همه گزاره‌ها (چه صادق چه کاذب، و چه توتولوژی چه تناقض و چه غیر اینها) را با هم بنویسیم مجددا به F می‌رسیم زیرا این فرمول نامتناهی شامل تناقض‌های فراوان خواهد بود. ترکیب فصلی همه گزاره‌ها نیز معادل T خواهد شد زیرا قضایای نظام در درون آن وجود دارد.

خلاصه‌ای از این بحث در جدول زیر آمده است:

<table>
<tr><th>فرمول‌ها / نوع عمل</th><th>همه صدق‌های منطقی</th><th>همه گزاره‌های صادق</th><th>همه گزاره‌ها</th><th>همه گزاره‌های کاذب</th><th>همه تناقض‌های منطقی</th></tr>
<tr><td>ترکیب عطفی</td><td colspan="2">T</td><td colspan="3">F</td></tr>
<tr><td>ترکیب فصلی</td><td colspan="3">T</td><td colspan="2">F</td></tr>
</table>

صدق و کذب در منطق ربط

چنان که می‌دانیم در منطق کلاسیک گزاره‌ها، تنها یک نوع صدق و یک نوع کذب قابل بیان است و برای نمونه، صدق ضروری و کذب امکانی در آن قابل بیان نیست. اما چنان که دیدیم، در منطق ربط R، دست کم دو نوع صدق و دو نوع کذب را می‌توان از هم بازشناخت: صدق مطلق و صدق امکانی و کذب مطلق و کذب ضروری. کذب ضروری را «کاملا کاذب» و صدق امکانی را «شبه صادق» می‌نامیم.

گفتیم که در منطق کلاسیک، برای صدق و کذب، نمادهای T و F را وضع کرده‌اند. همه قضایای منطق هم‌ارز T و همه تناقضات منطقی هم‌ارز F هستند (یعنی ارزش یکسان دارند.) به علاوه، همه گزاره‌های صادق هم‌ارز T و همه گزاره‌های کاذب هم‌ارز F هستند.

اما آیا همه قضایای منطق که هم‌ارز هستند (یعنی همه صادقند) آیا مستلزم هم‌دیگر نیز هستند؟ در منطق ربط، پاسخ منفی است زیرا همه گزاره‌های صادق مستلزم همه گزاره‌های صادق نیستند. برای نمونه، $P \to P$ مستلزم $P \supset P$ است و نه بالعکس با این‌که هر دو همیشه صادق هستند زیرا چنان که گفتیم شرطی مادی ضعیف‌تر از شرطی ربطی است و نمی‌تواند آن را نتیجه دهد. مثال دیگر، $(P \to P) \wedge (Q \to Q)$ مستلزم $(P \to P)$ است اما نه بالعکس. مثال سوم، $(P \to P)$ مستلزم $(P \to P) \vee (Q \to Q)$ است اما نه بالعکس.

هر چه ترکیب عطفی قضایای منطق بزرگ‌تر باشد فرمولی قوی‌تر و هرچه ترکیب فصلی آن‌ها بزرگ‌تر باشد فرمولی ضعیف‌تر حاصل می‌شود. از این‌سخنان نتیجه می‌شود که درمنطق ربط، بر خلاف منطق کلاسیک، هیچ فرمولی قوی‌ترین یا ضعیف‌ترین فرمول نیست.

اگر امکان می‌داشت فرمول‌های نامتناهی داشته باشیم آنگاه ترکیب عطفی همه قضایا، قوی‌ترین فرمول منطقا صادق و ترکیب فصلی همه قضایا، ضعیف‌ترین فرمول منطقا صادق می‌بود. در مورد گزاره‌های منطقا کاذب نیز همین طور است: اگر فرمول‌های نامتناهی ممکن می‌بودند ترکیب عطفی همه تناقض‌های منطقی، قوی‌ترین گزاره منطقا کاذب و ترکیب فصلی آن‌ها، ضعیف‌ترین بودند.

هرچند نوشتن فرمول‌های نامتناهی ممکن نیست ولی می‌توان نمادی را برای آن‌ها تعریف کرد و با بیان قواعد اصلی مناسب، سایر قواعد و قوانین آن‌ها را بررسی نمود (چیزی شبیه نماد ∞ که در ریاضیات برای بی‌نهایت به کار می‌رود و مثلا گفته می‌شود $3 + \infty = \infty$). خوشبختانه، در منطق ربط، چنین کاری انجام شده است: F را برای قوی‌ترین

فرمول کاذب (یعنی ترکیب عطفی نقیض همه قضایای منطق)، f را برای ضعیف‌ترین فرمول کاذب (یعنی ترکیب فصلی نقیض همه قضایای منطق) و T را برای نقیض F و t را برای نقیض f قرار داد کرده‌اند. واضح است که t قوی‌ترین فرمول صادق و T ضعیف‌ترین فرمول صادق خواهند بود.

خلاصه مطالب فوق را در جدول زیر می‌آوریم:

فرمول‌ها / نوع عمل	همه قضایای منطق	همه تناقض‌های منطقی
ترکیب عطفی	t	F
ترکیب فصلی	T	f

F را «تناقض قوی» یا «کذب ضروری» و f را «تناقض ضعیف» یا «کذب مطلق» نیز می‌توان نام گذاری کرد. T را «صدق امکانی» و t را «صدق مطلق» می‌توان نام نهاد. T و F صدق و کذب وجهی هستند اما t و f صدق و کذب غیر وجهی.

نکته‌ای که در اینجا باقی می‌ماند این است که علی رغم بداهت ادعا شده در بندهای پیشین، هم‌توانی فرمول‌های ربطی f، t، F و T با ترکیب‌های نامتناهی گفته شده چگونه اثبات می‌شود؟ همان طور که می‌دانیم، در قضایای راجع به T و F در منطق ربط، دو قضیه زیر را داریم:

$(T \vee A) \leftrightarrow T$ و $(F \wedge A) \leftrightarrow F$

که شباهت آن با تساوی‌های زیر آشکار است:

$\infty + a = \infty$ و $\infty - a = \infty$

این شباهت‌ها، هرچند می‌تواند به عنوان تأیید از یک سو و تقریب به ذهن از سوی دیگر به کار رود، اما مجوز استفاده از نمادهای اختصاری برای فرمول‌های نامتناهی نمی‌شود. در اینجا، چیزی جز برهان و دلیل مسأله را فیصله نمی‌دهد. علاوه بر عدم ارائه برهان برای مجاز بودن این ساده‌سازی‌ها و کوتهنوشت‌ها، ایراد دیگری نیز به چشم می‌خورد و آن اینکه ترکیب عطفی همه قضایا، هرچند قوی‌ترین قضیه منطق می‌تواند باشد، اما قوی‌ترین گزاره صادق نمی‌تواند باشد زیرا بسیاری از گزاره‌های صادق در عالم واقع (یا صادق در یک تعبیر خاص) گزاره‌های اتفاقی هستند و از قضایای منطق نتیجه نمی‌شوند؛ بنابراین، ترکیب عطفی همه قضایای منطق این توان را ندارد که همه گزاره‌های صادق را نتیجه دهد. از این نتیجه می‌گیریم که ترکیب عطفی همه قضایای منطق ضعیف‌تر از ترکیب عطفی همه گزاره‌های صادق است. اگر این نتیجه را با یکی از قواعد t همراه کنیم نتیجه خواهیم گرفت که ترکیب عطفی همه قضایای منطق ضعیف‌تر از فرمول t است. قاعده مورد نظر این است که از A می‌توان $t \rightarrow A$ را نتیجه گرفت. بنا بر این قاعده، هر گزاره‌ای که صادق باشد t آن را نتیجه می‌دهد. از این رو، t ترکیب عطفی همه گزاره‌های صادق را (در صورت امکان نوشتن چنین فرمولی) نتیجه می‌دهد.

علی رغم این پارادوکس، ترکیب عطفی همه قضایا معادل ترکیب عطفی همه گزاره‌های صادق و معادل t است. برهان: ترکیب عطفی همه قضایای منطق ربط را X بنامید. واضح است که $X \rightarrow (A \rightarrow A)$ قضیه خواهد بود زیرا تالی، خود، قضیه‌ای از منطق ربط است و X ترکیب عطفی همه قضایای منطقی است. اکنون، بنا به قاعده جابجایی مقدم که در

منطق ربط، معتبر است، به $A \rightarrow (X \rightarrow A)$ می‌رسیم. فرمول اخیر می‌گوید که هر گزاره صادق را X نتیجه می‌دهد. بنابراین، X ترکیب عطفی همه گزاره‌های صادق و از این رو، فرمول t را نتیجه می‌دهد. بر همین اساس، می‌توان برهان آورد بر این که ترکیب فصلی همه تناقض‌های منطقی معادل ترکیب فصلی همه گزاره‌های کاذب و از این رو، معادل f است.

برهان هم‌توانی برای T و F بسیار آسان‌تر است: ترکیب عطفی همه تناقض‌های منطقی هر گزاره به صورت $A \wedge \sim A$ را نتیجه می‌دهد و از آنجا که یکی از مؤلفه‌های فرمول اخیر، کاذب است و از ترکیب عطفی نتیجه می‌شود، پس ترکیب عطفی همه تناقض‌های منطقی، همه گزاره‌های کاذب و لذا ترکیب عطفی همه آنها را نتیجه می‌دهد. برعکس، ترکیب عطفی همه گزاره‌های کاذب، ترکیب عطفی همه تناقض‌ها را نتیجه می‌دهد زیرا تناقض‌ها بخشی از گزاره‌های کاذب هستند. از آنجا که T نقیض F است نتیجه می‌گیریم که ترکیب فصلی همه قضایای منطق معادل ترکیب فصلی همه گزاره‌های صادق و معادل T است.

بنابراین، تاکنون، علاوه بر جدول قبل، جدول زیر را نیز ثابت کرده‌ایم:

فرمول‌ها / نوع عمل	همه گزاره‌های صادق	همه گزاره‌های کاذب
ترکیب عطفی	t	F
ترکیب فصلی	T	f

در باره T و F بیش از این را می‌توان اثبات کرد: ترکیب عطفی همه تناقض‌ها، نه تنها معادل ترکیب عطفی همه گزاره‌های کاذب است، بلکه معادل ترکیب عطفی همه گزاره‌ها (چه صادق چه کاذب) است. هم‌چنین، ترکیب فصلی همه قضایا، نه تنها معادل ترکیب فصلی همه گزاره‌های صادق است، بلکه معادل ترکیب فصلی همه گزاره‌ها (چه صادق چه کاذب) است. برهان همان است که در بند پیشین گفته شد با تغییرات زیر: ترکیب عطفی همه تناقض‌های منطقی هر گزاره به صورت $A \wedge \sim A$ را نتیجه می‌دهد و از آنجا که A یکی از مؤلفه‌های فرمول اخیر است و از ترکیب عطفی نتیجه می‌شود، پس ترکیب عطفی همه تناقض‌های منطقی، همه گزاره‌ها و لذا ترکیب عطفی همه آنها را نتیجه می‌دهد. برعکس، ترکیب عطفی همه گزاره‌ها ، ترکیب عطفی همه تناقض‌ها را نتیجه می‌دهد زیرا تناقض‌ها بخشی از گزاره‌ها هستند.

به دلیل این ملاحظات، می‌توانیم جدول بالا را به صورت زیر تفصیل دهیم:

<table>
<tr><th>فرمول‌ها / نوع عمل</th><th>همه گزاره‌های صادق</th><th>همه گزاره‌ها</th><th>همه گزاره‌های کاذب</th></tr>
<tr><td>ترکیب عطفی</td><td>t</td><td colspan="2">F</td></tr>
<tr><td>ترکیب فصلی</td><td colspan="2">T</td><td>f</td></tr>
</table>

باید توجه کنیم که t قوی‌ترین فرمول صادق است نه قوی‌ترین فرمول ولی F قوی‌ترین فرمول است زیرا وقتی همه تناقض‌ها در یک فرمول گرد آمده باشند همه گزاره‌ها در ضمن آن تناقض‌ها در درون آن فرمول جای دارند و لذا F همه

فرمول‌ها را نتیجه می‌دهد ولی t همه قضایای منطق را. هم‌چنین خوب است بدانیم که f ضعیف‌ترین فرمول کاذب است نه ضعیف‌ترین فرمول ولی T ضعیف‌ترین فرمول است زیرا وقتی همه قضایای منطق در درون آن قرار دارد و $P \vee \sim P$ نیز قضیه است پس همه فرمول‌ها به طور فصلی در آن قرار دارند لذا T از هر فرمولی می‌تواند استنتاج شود.[9]

در بخش‌های بعدی، سورهای گزاره‌ای را معرفی خواهیم کرد. به کمک این سورها، می‌توانیم انواع صدق و کذب را به صورت زیر تعریف کنیم:

$$f =_{\text{تع}} \exists p\, (p \wedge \sim p) \qquad t =_{\text{تع}} \forall p \sim(p \wedge \sim p)$$

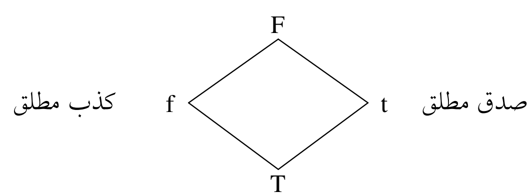
$$F =_{\text{تع}} \forall p\, (p \wedge \sim p) \qquad T =_{\text{تع}} \exists p \sim(p \wedge \sim p)$$

به کمک این تعریف‌ها، بسیاری از آنچه به طور غیر صوری بیان کردیم به آسانی قابل اثبات خواهد بود. با قواعدی که برای سورهای گزاره‌ای خواهیم گفت، تعریف t و f را می‌توان به صورت زیر ساده کرد:

$$F =_{\text{تع}} \forall p\, p \qquad T =_{\text{تع}} \exists p\, p$$

روابط درونی میان انواع صدق و کذب در R در نمودار زیر آمده است. فرمول‌های بالاتر قوی‌تر هستند و می‌توانند فرمول‌های ضعیف‌تر را نتیجه دهند.

کذب ضروری



صدق امکانی

به وضوح، می‌توانیم تفاوت روابط صدق و کذب در منطق ربط و منطق کلاسیک را مشاهده کنیم. همه قضایای فاقد نماد صدق و کذب میان t و T هستند و نقیض آن‌ها میان f و F . میان t و F و نیز میان f و T هیچ فرمولی نیست که فاقد نماد صدق و کذب باشد.

---

[9] توجه کنید که هرچند t قوی‌ترین فرمول نیست اما در میان فرمول‌هایی که در آن‌ها هیچ نماد صدق و کذب به کار نرفته است هیچ فرمولی نیست که از t قوی‌تر باشد. در مورد f نیز می‌توان گفت هیچ فرمول فاقد نماد صدق و کذب نیست که از f ضعیف‌تر باشد.

بر اساس آنچه گفته شد، قواعد کلاسیک به صورت زیر برای انواع صدق و کذب در منطق ربط تقسیم می‌شود:

	کذب و تناقض	کذب و تناقض	کذب و استلزام تناقض	معرفی تناقض ضعیف	حذف تناقض قوی	برهان خلف (معرفی ناقض)
قواعد مربوط به F	$\frac{F}{\sim(P \to P)}$	$\frac{F}{P \wedge \sim P}$	$\frac{P \to F}{\sim P}$	***	$\frac{F}{P}$	$\begin{array}{l} \lvert\ P \\ \lvert\ \vdots \\ \lvert\ F \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$
قواعد مربوط به f	$\frac{\sim(P \to P)}{f}$	$\frac{P \wedge \sim P}{f}$	$\begin{array}{c} P \to f \\ \hline\hline \sim P \end{array}$	$\frac{P \quad \sim P}{f}$	***	$\begin{array}{l} \lvert\ P \\ \lvert\ \vdots \\ \lvert\ f \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$

	صدق و توتولوژی	صدق و قضایا	تعریف صدق به استلزام از صدق	معرفی صدق ضعیف	قضیه بودن صدق
قواعد مربوط به T	$\frac{P \vee \sim P}{T}$	$\frac{P \to P}{T}$	$\frac{T \to P}{P}$	$\frac{P}{T}$	T
قواعد مربوط به t	$\frac{t}{P \vee \sim P}$	$\frac{t}{P \to P}$	$\begin{array}{c} P \\ \hline\hline t \to P \end{array}$		t

واضح است که از میان قواعد مربوط به F ، قاعده حذف تناقض قوی می‌تواند سایر قواعد F را به عنوان قواعد فرعی نتیجه بدهد. چنان که می‌بینیم، F دیگر قاعده دو طرفه ندارد. در قواعد مربوط به f ، قاعده دوطرفه «تعریف کذب به استلزام تناقض» برای اثبات سایر قواعد به عنوان قواعد فرعی کفایت می‌کند. اما برای اینکه ساختار استنتاج طبیعی محفوظ بماند بهتر است دو قاعده معرفی f و برهان خلف مربوط به آن را به عنوان قاعده اصلی نگاه داریم و سایر قواعد را به کمک آن دو اثبات کنیم.

هم‌چنین، واضح است که از میان قواعد مربوط به T ، قاعده معرفی صدق ضعیف می‌تواند سایر قواعد T را به عنوان قواعد فرعی نتیجه بدهد. چنان که می‌بینیم، T دیگر قاعده دو طرفه ندارد. در قواعد مربوط به t ، قاعده دوطرفه «تعریف صدق به استلزام از صدق قوی» برای اثبات سایر قواعد به عنوان قواعد فرعی کفایت می‌کند. اما برای اینکه

ساختار استنتاج طبیعی محفوظ بماند بهتر است دو قاعده «صدق و قضایا» و «قضیه بودن صدق» را به عنوان قاعده اصلی نگاه داریم و سایر قواعد را به کمک آن دو اثبات کنیم.

با توضیحات بالا، می‌توانیم قواعد اصلی و برخی از قواعد فرعی انواع صدق و کذب را به صورت زیر بیان کنیم:

	قواعد فرعی				قواعد اصلی	
	کذب و تناقض	کذب و تناقض	کذب و استلزام تناقض	برهان خلف (معرفی ناقض)	قواعد معرفی	قواعد حذف
قواعد مربوط به F	$\dfrac{F}{\sim(P \to P)}$	$\dfrac{F}{P \wedge \sim P}$	$\dfrac{P \to F}{\sim P}$	$\begin{array}{l\|l} & P \\ & \vdots \\ & F \\ \hline \therefore & \sim P \end{array}$	***	$\dfrac{F}{P}$
قواعد مربوط به f	$\dfrac{\sim(P \to P)}{f}$	$\dfrac{P \wedge \sim P}{f}$	$\begin{array}{c} P \to f \\ \hline\hline \sim P \end{array}$		$\dfrac{\begin{array}{c} P \\ \sim P \end{array}}{f}$	$\begin{array}{l\|l} & P \\ & \vdots \\ & f \\ \hline \therefore & \sim P \end{array}$
قواعد مربوط به T	$\dfrac{P \to P}{T}$	$\dfrac{P \vee \sim P}{T}$	$\dfrac{T \to P}{P}$	T	$\dfrac{P}{T}$	***
قواعد مربوط به t		$\dfrac{t}{P \vee \sim P}$	$\begin{array}{c} P \\ \hline\hline t \to P \end{array}$		t	$\dfrac{t}{P \to P}$

قضایا

در R، قضایای مربوط به صدق و کذب از منطق کلاسیک به چهار دسته تقسیم کرده‌ایم: قسم اول قضایایی است که برای هر دو نوع صدق و هر دو نوع کذب اعتبار دارند، قسم دوم آن‌هایی که برای صدق و کذب وجهی، یعنی T و F، قسم سوم برای صدق و کذب مطلق و غیر وجهی، یعنی t و f، معتبرند و قسم چهارم برای هیچ کدام معتبر نیستند و در واقع پارادوکس‌های صدق و کذب می‌توانند نام بگیرند.

در R، قسم پنجمی نیز می‌توان مطرح کرد که در واقع ترکیب انواع صدق و کذب است. این قسم پنجم را نیز با عنوان «ترکیبی» ذکر کرده‌ایم:

قواعد صدق و کذب در R

ترکیبی	مشترک میان t و T مشترک میان f و F	مختص T و F	مختص t و f	مختص هیچ کدام (پارادوکسی)
$t \to T$	T	$A \to T$	$(t \to A) \leftrightarrow A$	$A \to ((t \wedge A) \leftrightarrow t)$
$F \to f$	t	$F \to A$	$(A \to f) \leftrightarrow \sim A$	$A \to ((t \vee A) \leftrightarrow A)$
$(t \to T) \leftrightarrow T$	$\sim F$	$F \to T$	$(t \to t) \to t$	$\sim A \to ((f \vee A) \leftrightarrow f)$
$(F \to f) \leftrightarrow T$	$\sim f$		$(f \to f) \to t$	$\sim A \to ((f \wedge A) \leftrightarrow A)$
$(t \wedge T) \leftrightarrow t$	$T \leftrightarrow \sim F$	$(A \to A) \to T$	$t \to (A \to A)$	$t \leftrightarrow (A \to A)$
$(t \vee T) \leftrightarrow T$	$t \leftrightarrow \sim f$	$(A \vee \sim A) \to T$	$t \to (A \vee \sim A)$	$t \leftrightarrow (A \vee \sim A)$
$(f \vee F) \leftrightarrow f$	$F \leftrightarrow \sim T$	$F \to (A \wedge \sim A)$	$(A \wedge \sim A) \to f$	$f \leftrightarrow (A \wedge \sim A)$
$(f \wedge F) \leftrightarrow F$	$f \leftrightarrow \sim t$	$F \to (A \circ \sim A)$	$(A \circ \sim A) \to f$	$f \leftrightarrow (A \circ \sim A)$
$(T \to F) \to f$	$(T \to F) \leftrightarrow F$	$(T \vee A) \leftrightarrow T$		$T \leftrightarrow (A \to A)$
	$(F \to T) \to T$	$(T \wedge A) \leftrightarrow A$		$T \leftrightarrow (A \vee \sim A)$
	$T \leftrightarrow ((T \to F) \to F)$	$(F \vee A) \leftrightarrow A$		$F \leftrightarrow (A \wedge \sim A)$
	$(t \to f) \leftrightarrow f$	$(F \wedge A) \leftrightarrow F$		$F \leftrightarrow (A \circ \sim A)$
	$(f \to t) \to t$	$(T \vee F) \leftrightarrow T$		
	$t \leftrightarrow ((t \to f) \to f)$	$(T \wedge F) \leftrightarrow F$	$A \leftrightarrow ((A \to f) \to f)$	

تمرین:

۱. فرمول‌های چهار دسته اول در منطق ربط قابل اثباتند. آنها را اثبات کنید.

۲. فرمول‌های دسته پنجم (سمت راست) توتولوژی کلاسیک هستند. نشان دهید که این توتولوژی‌ها در منطق ربط قضیه نیستند.

۳. فرمول‌های دیگری را بیابید که جدول بالا را کامل کنند.

۴. نشان دهید که توتولوژی‌های ساخته شده تنها از T و F ، قضیه منطق ربط هستند.

شباهت T و F در منطق ربط با صدق و کذب کلاسیک

از میان صدق و کذب، T و F شباهت بیشتری به صدق و کذب کلاسیک دارند و همه سطرهای جدول ارزش برای آنها معتبر است. در زیر قضایای این دو فرمول را با جدول‌های ارزش کلاسیک مقایسه می‌کنیم:

P	Q	$P \wedge Q$	قضایا
T	T	T	$(T \wedge T) \leftrightarrow T$
T	F	F	$(T \wedge F) \leftrightarrow F$
F	T	F	$(F \wedge T) \leftrightarrow F$
F	F	F	$(F \wedge F) \leftrightarrow F$

P	Q	$P \vee Q$	قضایا
T	T	T	$(T \vee T) \leftrightarrow T$
T	F	T	$(T \vee F) \leftrightarrow T$
F	T	T	$(F \vee T) \leftrightarrow T$
F	F	F	$(F \vee F) \leftrightarrow F$

P	$\sim P$	
T	F	$T \leftrightarrow \sim F$
F	T	$F \leftrightarrow \sim T$

P	Q	$P \to Q$	
T	T	T	$(T \to T) \leftrightarrow T$
T	F	F	$(T \to F) \leftrightarrow F$
F	T	T	$(F \to T) \leftrightarrow T$
F	F	F	$(F \to F) \leftrightarrow T$

اثبات قضایای بالا، به جز برای شرطی‌ها، بسیار آسان است و به خواننده واگذار می‌شود. در میان قضایای مربوط به شرطی‌ها، برهان سطر اول، کمی دشوار و برهان سایر سطرها نسبتا آسان است و ما تنها برهان سطر اول را می‌آوریم هرچند توصیه می‌شود برهان همین سطر را نیز خواننده خود بجوید و برهان خود را با برهان ما بسنجد. برهان راست به چپ این سطر از این قرار است:

$T \to (T \to T)$

1	1	T	فرض
2	2	$\sim T$	فرض
3	3	$\sim (T \to \sim T)$	فرض
3	4	T	معرفی T (۳)
2 , 3	5	$T \wedge \sim T$	م ∧ (۲ و ۴)
2	6	$\sim\sim (T \to \sim T)$	ب خ (۳ – ۵)
2	7	$T \to \sim T$	ن م (۶)
1 , 2	8	$\sim T$	و م (۱ و ۷)
1	9	$\sim T \to \sim T$	د ش (۲ – ۲)
1	10	$T \to T$	ع ن (۹)
	11	$T \to (T \to T)$	د ش (۱ – ۱۰)

به نظر شما، برهان بسیار کوتاه این قضیه در منطق کلاسیک، چرا در منطق ربط این همه طولانی شده است؟ آیا شما برهانی کوتاه‌تر سراغ دارید؟ بعدها، وقتی ادات تلفیق، $\circ$ ، را وارد زبان منطق خود می‌کنیم، خواهیم دید که شرط یکسانی فرض‌ها برای معرفی تلفیق وجود ندارد. (برای توضیح این نکته، به بخش تلفیق مراجعه کنید.) به همین دلیل، می‌توانیم یک برهان کوتاه، شبیه برهان کلاسیک به صورت زیر، بیاوریم:

$T \to (T \to T)$

1	1	T	فرض
2	2	T	فرض
1 , 2	3	$T \circ T$	معرفی $\circ$ (۲)
1 , 2	4	T	معرفی T (۳)
1	5	$T \to T$	د ش (۲ – ۴)
	6	$T \to (T \to T)$	د ش (۱ – ۵)

پرسشی دیگر، آیا اثبات قضایای کلاسیک برای T و F در منطق ربط می‌تواند نشانگر این باشد که این دو فرمول همان صدق و کذب کلاسیک هستند؟ شاید در نظر ابتدایی، چنین به نظر برسد اما حقیقت امر این است که این دو

فرمول، تفاوت بسیاری با صدق و کذب کلاسیک دارند و برای نمونه، قضایای مختص t و f و نیز توتولوژی‌های پارادوکسی برای T و F صدق نمی‌کند:

پارادوکس‌های مشترک بین T و F و t و f	پارادوکس‌های مختص T و F
$A \to ((T \wedge A) \leftrightarrow T)$	$(T \to A) \leftrightarrow A$
$A \to ((T \vee A) \leftrightarrow A)$	$(A \to F) \leftrightarrow \sim A$
$\sim A \to ((F \vee A) \leftrightarrow F)$	$(T \to T) \to T$
$\sim A \to ((F \wedge A) \leftrightarrow A)$	$(F \to F) \to T$
$T \leftrightarrow (A \to A)$	$T \to (A \to A)$
$T \leftrightarrow (A \vee \sim A)$	$T \to (A \vee \sim A)$
$F \leftrightarrow (A \wedge \sim A)$	$(A \wedge \sim A) \to F$
$F \leftrightarrow (A \circ \sim A)$	$(A \circ \sim A) \to F$
$T \leftrightarrow (A \to A)$	$A \leftrightarrow ((A \to F) \to F)$
$T \leftrightarrow (A \vee \sim A)$	
$F \leftrightarrow (A \wedge \sim A)$	
$F \leftrightarrow (A \circ \sim A)$	

پاسخ دیگری که به این پرسش دوم می‌توان داد این است که اگر در منطق ربط، استلزام مادی و تابع ارزشی $p \supset q$ را به $\sim p \vee q$ و هم‌ارزی تابع ارزشی $p \equiv q$ را به $(p \supset q) \wedge (q \supset p)$ تعریف کنیم آنگاه t و f، با این دوشرطی مادی، برای همه سطرهای جدول ارزش کلاسیک، قضیه‌ای متناظر در منطق ربط دارند:

P	Q	$P \wedge Q$	قضایا
t	t	t	$(t \wedge t) \equiv t$
t	f	f	$(t \wedge f) \equiv f$
f	t	f	$(f \wedge t) \equiv f$
f	f	f	$(f \wedge f) \equiv f$

P	Q	$P \vee Q$	قضایا
t	t	t	$(t \vee t) \equiv t$
t	f	t	$(t \vee f) \equiv t$
f	t	t	$(f \vee t) \equiv t$
f	f	f	$(f \vee f) \equiv f$

P	$\sim P$	
t	f	$t \equiv \sim f$
f	t	$f \equiv \sim t$

P	Q	$P \supset Q$	
t	t	t	$(t \supset t) \equiv t$
t	f	f	$(t \supset f) \equiv f$
f	t	t	$(f \supset t) \equiv t$
f	f	f	$(f \supset f) \equiv t$

اما این دلیل نمی‌شود که t و f را در منطق ربط، همان صدق و کذب کلاسک بدانیم.

به طور کلی، هیچ یک از صدق و کذب‌های منطق ربط همان صدق و کذب منطق کلاسیک نیستند اما T و F شباهت بیشتری به صدق و کذب منطق کلاسیک دارند زیرا علاوه بر اینکه با شرطی و دوشرطی مادی، احکامی مشابه احکام صدق و کذب کلاسیک دارند، با شرطی و دوشرطی ربطی، نیز، احکامی مشابه احکام صدق و کذب کلاسیک دارند. این شباهت وقتی به اوج می‌رسد که زبان منطق ما، هیچ متغیر گزاره‌ای نداشته و تنها شامل T و F و ادات‌های منطقی باشد. در این صورت، شباهت، تام و تمام است.

با این وجود، نباید فراموش کرد که زبان‌های طبیعی و علمی، تنها از صدق و کذب ساخته نشده‌اند و توجه گویندگان به این زبان‌ها، تنها به صدق و کذب گزاره‌ها نیست. در این زبان‌ها، گزاره‌های متنوعی به کار می‌رود و

محتوای این گزاره‌ها، علاوه بر صدق و کذبشان، مورد توجه جدی است. بنابراین، منطق کلاسیک نمی‌تواند جواب‌گوی نیازهای این زبان‌ها و علوم طبیعی باشد.

تهی بودن مقدمات و نتایج در منطق کلاسیک

در استدلال (یا صورت‌برهان یا رشته،) ممکن است مجموعه مقدمات تهی باشد که در این صورت، به نتیجه «قضیه» گفته می‌شود. در این صورت، اگر A فرمول باشد صورت برهان $\varnothing \vdash A$ به صورت $\vdash A$ نوشته می‌شود. در توجیه این مسئله، می‌توان به هم‌ارزی‌های زیر توجه کرد:

$$
\begin{array}{rcclcr}
(A \wedge B \wedge C) \vdash D & \equiv & \vdash & (A \wedge B \wedge C) \supset D & \equiv \vdash & \sim A \vee \sim B \vee \sim C \vee D \\
(B \wedge C) \vdash D & \equiv & \vdash & (B \wedge C) \supset D & \equiv \vdash & \sim B \vee \sim C \vee D \\
C \vdash D & \equiv & \vdash & C \supset D & \equiv \vdash & \sim C \vee D \\
\{\} \vdash D & \equiv & \vdash & \{\} \supset D & \equiv \vdash & D
\end{array}
$$

اگر برای صدق درمنطق خود نمادی داشته باشیم مانند T، در این صورت، قضیه بودن A را می‌توانیم به صورت $T \vdash A$ نیز به نمایش بگذاریم. به همین دلیل است که می‌توانیم صدق و T را معادل «تهی بودن مقدمات» بدانیم.

در این نظام‌ها، مقدمات مانند اعضای مجموعه به وسیله کاما از هم جدا می‌شوند. کاما عملگری فرازبانی است که معادل عملگر عاطف از زبان موضوعی است. به همین دلیل، اگر تعداد مقدمات متناهی باشد می‌توان ترکیب عطفی آن‌ها را جای‌گزین مجموعه مقدمات نمود که در این صورت، صورت برهان حاصل هم‌ارز صورت برهان اصل است.

استدلال، در حساب رشته‌های گنتزن، مرکب از مجموعه مقدمات و مجموعه نتایج است. برای مثال، اگر S و S' مجموعه باشند رشته یا صورت برهان به صورت $S \vdash S'$ نوشته می‌شود. اعضای مجموعهٔ نتایج نیز با نماد کاما از هم جدا می‌شوند ولی باید توجه داشت که کاما در نتیجه به معنای ترکیب فصلی است نه به معنای ترکیب عطفی. به همین دلیل، صورت برهانِ $[P \vee Q \vdash P , Q]$ یک صورت برهان معتبر است. در این نظام، ممکن است مجموعه نتایج نیز تهی باشد[10] که دراین صورت، مقدمات با هم «متضاد» و «ناسازگار»[11] هستند و می‌توانیم از نوشتن علامت مجموعه تهی خودداری کنیم. برای مثال صورت برهان $S \vdash \varnothing$ را می‌توانیم به صورت $S \vdash$ نیز بنویسیم. در توجیه این مسئله، می‌توان به هم‌ارزی‌های زیر توجه کرد:

$$
\begin{array}{lclclcl}
(A \wedge B) \vdash (C \vee D \vee E) & \equiv & \vdash (A \wedge B) \supset (C \vee D \vee E) & \equiv & \vdash \sim(A \wedge B) \vee C \vee D \vee E \\
(A \wedge B) \vdash (C \vee D) & \equiv & \vdash (A \wedge B) \supset (C \vee D) & \equiv & \vdash \sim(A \wedge B) \vee C \vee D \\
(A \wedge B) \vdash C & \equiv & \vdash (A \wedge B) \supset C & \equiv & \vdash \sim(A \wedge B) \vee C \\
(A \wedge B) \vdash \{\} & \equiv & \vdash (A \wedge B) \supset \{\} & \equiv & \vdash \sim(A \wedge B)
\end{array}
$$

---

[10] در منطق کلاسیک، تهی بودن نتایج به این معنا نیست که مجموعه مقدمات هیچ نتیجه‌ای نمی‌دهند بلکه به این معناست که هر نتیجه‌ای می‌تواند بدهد. اما وقتی مقدمات تهی هستند هم می‌توانیم بگوییم که نتیجه از هیچ به دست آمده است و هم این‌که از هر مقدمه‌ای می‌تواند به دست آید. در منطق ربط، اما، چنین نیست. این نکته را جداگانه توضیح داده‌ایم.

[11] توجه کنید که ناسازگاری در منطق کلاسیک به معنای کذب حداقل یکی است؛ برای نمونه، $(P \wedge \sim P)$ و Q به معنای کلاسیک ناسازگارند زیرا حداقل یکی کاذب است. میان این دو فرمول، هیچ چیزی که باعث ناسازگاری بین این دو فرمول باشد دیده نمی‌شود و این دو فرمول به معنای ربطی سازگار هستند. معنای درست سازگاری را باید در منطق‌های ربط جستجو کرد. در منطق ربط، سازگاری را با تلفیق (و به عبارت دقیق‌تر، با امکان تلفیق) نشان می‌دهند.

اگر برای کذب نیز درمنطق خود نمادی داشته باشیم مانند F ، در این صورت، ناسازگار بودن S را می‌توانیم به صورت $S \vdash F$ نیز به نمایش بگذاریم. به همین دلیل است که می‌توانیم کذب و F را معادل «تهی بودن نتایج» بدانیم.

تهی بودن مقدمات و نتایج در منطق ربط

مجموعه مقدمات و دنباله مقدمات

در منطق ربط، علاوه بر مجموعه مقدمات و نتایج، می‌توان به دنباله مقدمات و دنباله نتایج نیز نظر داشت.[12] ترکیب مجموعه‌ای را اصطلاحا «ترکیب مصداقی» و ترکیب دنباله‌ای را «ترکیب معنایی» می‌نامند.

اعضای دنباله را به وسیله نقطه ویرگول از هم جدا می‌کنیم.[13] نقطه ویرگول در دنباله مقدمات به معنای سازگاری و تلفیق (fusion) و در دنباله نتایج به معنای منع خلو و تفریق (fission) است. منع خلو معادل ربطی ترکیب فصلی است یعنی دو گزاره به گونه‌ای با هم مرتبطند که هر دو کاذب نمی‌شوند. در منطق قدیم، این قسم را «منع خلو عنادی» نام می‌نهادند و منع خلو اتفاقی را از آن جدا می‌کردند. ترکیب فصلی در واقع اعم از هر دو نوع مذکور است. ترکیب عطفی و ترکیب فصلی ترکیب مصداقی هستند و تلفیق و تفریق (سازگاری و منع خلو) ترکیب معنایی هستند.

اگر دنباله یک عضوی باشد، مانند مجموعه‌ها، صدق آن عضو اراده می‌شود و اگر دنباله تهی باشد در مقدمات، به معنای قضیه بودن نتیجه و در نتایج، به معنای ناسازگار بودن مقدمات است. تا آن‌جا که نویسنده اطلاع دارد هیچ نمادی برای دنباله تهی قرار داد نشده است لذا همان‌طور که { } برای مجموعه تهی وضع شده است، نماد ( ) را برای دنباله تهی قرارداد می‌کنیم. در جدول زیر، چند صورت برهان را به عنوان مثال توضیح می‌دهیم:

[12] در منطق R، دنباله‌ها خاصیت جابجایی را دارند اما خاصیت تکرار اعضا را ندارند. در عین حال، دنباله‌ها، در منطق R، خاصیت حذف موارد تکراری را دارند. در منطق‌های ضعیف‌تر، برخی از خواص مجموعه ها از میان برداشته می‌شوند و در نظام بسیار ضعیف TL، دنباله‌ها هیچ یک از این خواص را ندارند و دقیقا مانند دنباله‌های ریاضی عمل می‌کنند و در نظام پایه B به مفهوم ضعیف‌تر دسته می‌رسیم. در دسته، بر خلاف دنباله، دیگر خاصیت شرکت‌پذیری وجود ندارد. در دنباله، ((a , (b , c)) و ((a , b) , c) و (a , b , c) تفاوتی ندارند و یکی تلقی می‌شوند اما در دسته، دو فرمول اول متفاوتند و فرمول سوم، بنا به قرارداد، کوتهنوشت یکی از دو در نظر گرفته می‌شود.

[13] در ریاضیات، از آکولاد برای مجموعه و از پرانتز برای دنباله و n تایی مرتب استفاده می‌شود؛ به همین دلیل، برای جدا کردن اعضا، چه در مجموعه و چه در دنباله، از کاما استفاده می‌شود اما در منطق ربط، به دلیل استفاده از پرانتز برای هر دو، مجبور شده‌اند نقطه ویرگول را برای دنباله به کار ببرند.

P و Q با هم مستلزم منع خلو R و S است.	$P ; Q \vdash R ; S$
P و Q با هم مستلزم صدق یکی از R و S است.	$P ; Q \vdash R , S$
P و Q با هم مستلزم صدق R است.	$P ; Q \vdash R$
P و Q هر دو کاملا کاذب هستند.	$P ; Q \vdash \{\}$
P و Q ، با هم ناسازگار هستند.	$P ; Q \vdash ()$
P و Q مستلزم منع خلو R و S است.	$P , Q \vdash R ; S$
P و Q مستلزم صدق یکی از R و S است.	$P , Q \vdash R , S$
P و Q مستلزم صدق R است.	$P , Q \vdash R$
P و Q ، یکی یا هر دو کاملا کاذب هستند.	$P , Q \vdash \{\}$
P و Q ، یکی یا هر دو کاذب هستند.	$P , Q \vdash ()$
P مستلزم منع خلو R و S است.	$P \vdash R ; S$
P مستلزم صدق یکی از R و S است.	$P \vdash R , S$
P مستلزم R است.	$P \vdash R$
P کاملا کاذب است.	$P \vdash \{\}$
P کاذب است.	$P \vdash ()$
R و S هر دو شبه صادق هستند.	$\{\} \vdash R ; S$
R و S ، یکی یا هر دو شبه صادق هستند.	$\{\} \vdash R , S$
R شبه صادق است.	$\{\} \vdash R$
شبه صادق کاملا کاذب است. (تناقض باوری قوی)	$\{\} \vdash \{\}$
شبه صادق کاذب است. (تناقض باوری ضعیف)	$\{\} \vdash ()$
R و S منع خلو دارند.	$() \vdash R ; S$
R و S یکی یا هر دو صادق هستند.	$() \vdash R , S$
R صادق است.	$() \vdash R$
صادق کاملا کاذب است.	$() \vdash \{\}$
صادق کاذب است.	$() \vdash ()$

ترکیب عطفی و فصلی همه گزاره‌ها

( ) در جایگاه مقدمه به معنای t و در جایگاه نتیجه به معنای f است. اگر S دنباله باشد و برای صدق در منطق خود نمادی داشته باشیم مانند t، در این صورت، قضیه بودن A را می‌توانیم به صورت $()\vdash A$ و $t\vdash A$ نیز به نمایش بگذاریم. به همین دلیل است که می‌توانیم صدق و t را معادل «تهی بودن معنایی مقدمات» بدانیم. صورت برهان $S\vdash()$ را می‌توانیم به صورت $S \vdash$ نیز بنویسیم. اگر برای کذب نیز درمنطق خود نمادی داشته باشیم مانند f، در این صورت،

ناسازگار بودن S را می‌توانیم به صورت $S \vdash f$ نیز به نمایش بگذاریم. به همین دلیل است که می‌توانیم کذب و f را معادل «تهی بودن معنایی نتایج» بدانیم.

$\{\}$ در جایگاه مقدمه به معنای T و در جایگاه نتیجه به معنای F است. اگر S دنباله باشد و برای صدق امکانی درمنطق خود نمادی داشته باشیم مانند T، در این صورت، کاملا صادق بودن A را می‌توانیم به صورت $\{\} \vdash A$ و $T \vdash A$ نیز به نمایش بگذاریم. به همین دلیل است که می‌توانیم صدق و T را معادل «تهی بودن مصداقی مقدمات» بدانیم. صورت برهان $S \vdash \{\}$ را می‌توانیم به صورت $S \vdash$ نیز بنویسیم. اگر برای کذب ضروری نیز درمنطق خود نمادی داشته باشیم مانند F، در این صورت، کاملا کاذب بودن S را می‌توانیم به صورت $S \vdash F$ نیز به نمایش بگذاریم. به همین دلیل است که می‌توانیم کذب و F را معادل «تهی بودن مصداقی نتایج» بدانیم.

همه این نکات را در جدول زیر می‌توان خلاصه کرد:

<table dir="rtl">
<tr><th>فرمول‌ها / نوع عمل</th><th>همه صدق‌های منطقی</th><th>همه گزاره‌های صادق</th><th>همه گزاره‌ها</th><th>همه گزاره‌های کاذب</th><th>همه تناقض‌های منطقی</th></tr>
<tr><td>ترکیب عطفی</td><td colspan="2">t
تهی بودن معنایی مقدمه</td><td colspan="3">F
تهی بودن مصداقی نتیجه</td></tr>
<tr><td>ترکیب فصلی</td><td colspan="3">T
تهی بودن مصداقی مقدمه</td><td colspan="2">f
تهی بودن معنایی نتیجه</td></tr>
</table>

تلفیق و تفریق

در منطق ربط، می‌توان به کمک ادات ناقض و ادات شرطی، دو عملگر جدید را تعریف کرد که شباهت‌های فراوانی به عاطف و فاصل دارند. این دو عملگر عبارتند از تلفیق و تفریق (یا فیوژن و فیشن Fusion & Fission):

$$P \circ Q =_{\text{تع}} \sim(P \rightarrow \sim Q)$$
$$P + Q =_{\text{تع}} \sim P \rightarrow Q$$

تعریف این دو عملگر شبیه تعریف عاطف و فاصل از روی ادات ناقض و ادات شرطی تابع ارزشی است:

$$P \wedge Q =_{\text{تع}} \sim(P \supset \sim Q)$$
$$P \vee Q =_{\text{تع}} \sim P \supset Q$$

بسیاری از قواعد این دو عملگر نیز شبیه قواعد عاطف و فاصل در منطق کلاسیک است. قواعد اصلی این دو عملگر به قرار زیر است:

معرفی تلفیق:

A
B
———
$A \circ B$

بدون شرط یکسانی فرض‌ها

حذف تلفیق:

$A \circ B$
→ A فرض
→ B فرض
⋮
C مبتنی بر هر دو فرض
———
C

معرفی تفریق:

→ ~A فرض
⋮
B مبتنی بر فرض
———
$\therefore$ A + B نتیجه اول
$\therefore$ B + A نتیجه دوم

حذف تفریق:

A + B	A + B
~A	~B
B	A

قیاس انفصالی مانع خلو

شباهت معرفی تلفیق به معرفی عاطف در منطق کلاسیک از هر جهت کامل است اما قاعده حذف تلفیق، نه تنها هیچ شباهتی به قاعده حذف عاطف ندارد، بلکه از جهاتی شبیه قاعده حذف فاصل است که گویا دو برهانک آن در هم

ادغام شده‌اند! با وجود این، برای حذف عاطف، قاعده‌ای شبیه حذف تلفیق وجود دارد که شباهت تلفیق به عاطف را کامل می‌کند. قاعده مشابه برای عاطف را بعدا خواهیم آورد. شباهت قواعد تفریق به قواعد فرعی فاصل نیز کاملا آشکار است. تنها نکته‌ای که باقی می‌ماند این است که آیا قواعد مشابه قواعد اصلی فاصل، برای تفریق نیز وجود دارد؟ پاسخ این است که قاعده معرفی فاصل برای تفریق نامتعبر است یعنی نمی‌توان از P به $P + Q$ رسید؛ اما، قاعده حذف فاصل برای تفریق برقرار است اما نه به صورت قاعده اصلی بلکه به صورت قاعده فرعی:

قیاس مقسم

حذف تفریق

$$
\begin{array}{l}
P + Q \\
\left[\begin{array}{l} P \\ \vdots \\ R \end{array}\right. \\
\\
\left[\begin{array}{l} Q \\ \vdots \\ R \end{array}\right. \\
\hline
\therefore\ R
\end{array}
$$

(بدون شرط یکسانی فرض‌های R)

بسیاری از قواعد دو طرفه عاطف و فاصل که در منطق ربط، تبدیل به قواعد یک طرفه شدند برای تلفیق و تفریق به صورت دو طرفه برقرارند و برخی نیز به صورت یک‌طرفه معتبر هستند:

صدور:

$$
\begin{array}{c}
P \to (Q \to R) \\
\hline\hline
(P \circ Q) \to R
\end{array}
$$

تعادل ۱:

$$
\begin{array}{c}
P \leftrightarrow Q \\
\hline\hline
(\sim P + Q) \wedge (P + \sim Q) \\
\hline\hline
(\sim P + Q) \circ (P + \sim Q)
\end{array}
$$

استلزام ۱:

$$
\begin{array}{c}
P \to Q \\
\hline\hline
\sim P + Q
\end{array}
$$

تعادل ۲:

$$
\begin{array}{c}
P \leftrightarrow Q \\
\hline\hline
(P \wedge Q) + (\sim P \wedge \sim Q) \\
\hline\hline
(P \vee Q) \to (P \wedge Q)
\end{array}
$$

استلزام ۲:

$$
\begin{array}{c}
P \to Q \\
\hline\hline
\sim(P \circ \sim Q)
\end{array}
$$

و برخی نیز به صورت یک‌طرفه معتبر هستند:

جذب ۱:

$$\frac{\dfrac{P \to (P \wedge Q)}{P \to Q}}{P \to (P \circ Q)}$$

مقدم عطفی:

$$\frac{(P \to R) + (Q \to R)}{\begin{array}{l}(P \circ Q) \to R \\ (P \wedge Q) \to R\end{array}}$$

جذب ۲:

$$\frac{\dfrac{(P \vee Q) \to Q}{P \to Q}}{(P + Q) \to Q}$$

تالی فصلی:

$$\frac{(P \to Q) + (P \to R)}{\begin{array}{l}P \to (Q + R) \\ P \to (Q + R)\end{array}}$$

تمرین:

۱. ثابت کنید که قواعد دو طرفه و قواعد یک طرفه بالا برای تلفیق و تفریق قابل اثبات هستند.

۲. نشان دهید که تلفیق و تفریق خاصیت جابجایی و شرکت پذیری را دارند.

۳. پخش‌پذیری تلفیق روی فاصل و پخش‌پذیری تفریق روی عاطف را اثبات کنید.

۴. نشان دهید که تلفیق و تفریق، با یک دیگر، تحت قاعده دمورگان به هم مربوطند.

۵. نشان دهید که عاطف قوی‌تر از تلفیق و تفریق قوی‌تر از فاصل است. به عبارت دیگر، قواعد زیر را ثابت کنید:

$$A \wedge B \vdash A \circ B$$
$$A + B \vdash A \vee B$$

۶. نشان دهید که قاعده تکرار به صورت یک‌طرفه برای تلفیق و تفریق برقرار است. . به عبارت دیگر، قواعد زیر را ثابت کنید:

$$A \vdash A \circ A$$
$$A + A \vdash A$$

۷. قوانین تناقض و طرد شق ثالث را برای تلفیق و تفریق اثبات کنید:

$$\vdash \sim (A \circ \sim A)$$
$$\vdash A + \sim A$$

۸. ثابت کنید:

$$\frac{(A \to B) \circ (B \to A)}{(A \to B) \wedge (B \to A)}$$

$$\frac{(A \to B) \circ (C \to D)}{\begin{array}{l}A \circ C \;\to\; B \circ D \\ A + C \;\to\; B + D\end{array}}$$

اثبات WI به کمک W به روش اصل موضوعی:

1.	$P\wedge(P\to Q) \to P$	حذف $\wedge$
2.	$P\wedge(P\to Q) \to (P\to Q)$	حذف $\wedge$
3.	$(P\to Q) \to [(P\wedge(P\to Q)) \to Q)$	B (۱)
4.	$(P\wedge(P\to Q)) \to [(P\wedge(P\to Q)) \to Q)$	تعدی (۳ و ۲)
5.	$P\wedge(P\to Q) \to Q$	W (۴)

سؤال: با اینکه از I (یعنی A→A) استفاده نشد، چرا سطر ۵ را «WI» نامیده‌اند؟

اثبات WI به کمک W به روش استنتاج طبیعی:

1	1.	$P\wedge(P\to Q)$	فرض
1	2.	P	حذف $\wedge$ (۱)
1	3.	$P\to Q$	حذف $\wedge$ (۱)
1,1	4.	Q	وضع مقدم (۲ و ۳)
1	5.	Q	W (۴)
	6.	$P\wedge(P\to Q) \to Q$	دلیل شرطی (۱ تا ۵)

اثبات حذف نقض مضاعف به کمک اصل پِرس، P، به روش اصل موضوعی:

1.	$((P\to Q) \to P) \to P$	اصل پِرس
2.	$((P\to\bot) \to P) \to P$	نمونه جانشین (۱)
3.	$(\sim P\to P) \to P$	تعریف ~ (۲)
4.	$\sim\sim P \to (\sim P \to P)$	اصل کذب تالی
5.	$\sim\sim P \to P$	تعدی (۳ و ۲)

سؤال: آیا می‌توان اصل کذب تالی را از برهان بالا حذف و با یک قضیه شهودی مینیمال، جایگزین کرد؟ اگر چنین چیزی ممکن باشد آنگاه اصل پرس با منطق شهودی مینیمال برابر با منطق کلاسیک خواهد بود.

تعریف عملگر کلاسیک:

یک‌موضوعی: $$\frac{\vdash A=B}{\vdash {*A}={*B}}$$

عملگر کلاسیک

دوموضوعی: $$\frac{\vdash (A=B) \wedge (C=D)}{\vdash A*C = B*D}$$

برای رسیدن به منطق ربط سورها، کافی است قواعد سورهای کلاسیک را، بی هیچ کم و کاست، به منطق ربط گزاره‌ها بیفزاییم. در جدول زیر، قواعد اصلی منطق سورها را به سبک ایروینگ کپی آورده‌ایم. در این قواعد، ما، برای رفع ابهاماتی که در نظام کپی وجود دارد، از دو نوع نام استفاده می‌کنیم: نام‌های خاص و نام‌های بدلی. نام‌های بدلی نام‌های نامعین برای افراد یا اشیایی هستند که بر اساس آنها، یک سور جزیی صادق شده است. این همان برهان افتراض است که قدمای منطق از آن بهره‌ها جسته‌اند. در منطق جدید، نام‌هایی از نوع دیگر وجود دارند که «نام فرضی» خوانده می‌شوند. از آنجا که نام‌های فرضی همان متغیرهای فردی هستند ما آنها را به عنوان نام تلقی نمی‌کنیم. برای نام‌های خاص، از حروف کوچک اوایل لاتین مانند a، b، و c استفاده می‌کنیم. برای نام‌های بدلی، حروف اواسط، مانند i، j، k، l، m و n را به کار می‌بریم و حروف اواخر، مانند x، y و z نیز برای متغیرهای فردی به کار خواهند رفت. α برای اشاره به نام‌های خاص یا بدلی به کار می‌رود. با این بیان، قواعد عبارتند از:

نام‌های خاص: حروف کوچک اوایل لاتین مانند a، b، و c

نام‌های بدلی: حروف اواسط، مانند i، j، k، l، m و n

متغیرهای فردی: حروف اواخر، مانند x، y و z

قواعد منطق سورها:

معرفی سور وجودی	**حذف سور کلی**
$\dfrac{F(\alpha)}{\exists x F(x//\alpha)}$	$\dfrac{\forall x F(x)}{F(\alpha/x)}$
حذف سور وجودی	**معرفی سور کلی**
$\dfrac{\exists x F(x)}{F(\alpha/x)}$ α باید نام بدلی و جدید باشد.	$\dfrac{F(\alpha)}{\forall x F(x/\alpha)}$ α نباید در فرض‌های باز حضور داشته باشد. $F(\alpha)$ نباید شامل هیچ نام بدلی باشد.

α برای اشاره به نام‌های خاص یا بدلی (در دو قاعده بالایی، α می‌تواند نام خاص یا بدلی و قدیم یا جدید باشد.)

$F(x)$ یعنی عبارتی شامل دست کم یک متغیر فردی x

$F(\alpha/x)$ یعنی همان عبارت که α به جای همه موارد x نشسته است

$F(\alpha//x)$ یعنی همان عبارت که α به جای همه یا بعضی موارد x نشسته است

$F(\alpha)$ یعنی عبارتی شامل دست کم یک نام α

$F(x/\alpha)$ یعنی همان عبارت که x به جای همه موارد α نشسته است

$F(x//\alpha)$ یعنی همان عبارت که x به جای همه یا بعضی موارد α نشسته است

با افزودن قواعد سور کلاسیک (یعنی همین قواعد گفته شده) به منطق ربط گزاره‌ها، به منطق ربط سورها می‌رسیم. در این منطق، بیشتر قواعد آشنای منطق سورها قابل اثبات باقی می‌مانند زیرا در برهان آنها، از قواعد گزاره‌ای غیر ربطی

استفاده نشده است. برای نمونه، تغییر متغیر، تداخل، قوانین نقض سور، جابجایی سورهای همسان، قوانین ورود و خروج سور در دامنه عاطف و فاصل، پخش‌پذیری سور کلی نسبت به عاطف و پخش‌پذیری سور جزیی نسبت به فاصل، در هر دو منطق کلاسیک و ربط معتبر هستند. با این حال، برخی از قواعد کلاسیک سورها، در برهان خود، نیازمند قوانین غیر ربطی منطق کلاسیک گزاره‌ها هستند و از این رو، در منطق ربط قابل اثبات نیستند. از این گروه، می‌توان به قوانین ورود و خروج سور در دامنه شرطی اشاره کرد. از هر دو گروه، چند نمونه را ذکر می‌کنیم و اثبات ربطی بودن و نبودن آنها را بر عهده خواننده می‌گذاریم:

تمرین:

۱. نشان دهید که قواعد زیر همگی ربطی هستند.

قوانین ربطی سورها

تغییر متغیر		$\begin{array}{c}\forall x\, Fx \\ \hline\hline \forall y\, Fy\end{array}$	$\begin{array}{c}\exists x\, Fx \\ \hline\hline \exists y\, Fy\end{array}$		
تداخل		$\begin{array}{c}\forall x\, Fx \\ \hline \exists x\, Fx\end{array}$	$\begin{array}{c}P \rightarrow \forall x\, Fx \\ \hline P \rightarrow \exists x\, Fx\end{array}$	$\begin{array}{c}P \wedge \forall x\, Fx \\ \hline P \wedge \exists x\, Fx\end{array}$	$\begin{array}{c}P \vee \forall x\, Fx \\ \hline P \vee \exists x\, Fx\end{array}$
		$\begin{array}{c}\sim\exists x\, Fx \\ \hline \sim\forall x\, Fx\end{array}$	$\begin{array}{c}\exists x\, Fx \rightarrow P \\ \hline \forall x\, Fx \rightarrow P\end{array}$	$\begin{array}{c}\forall x\, Fx \wedge P \\ \hline \exists x\, Fx \wedge P\end{array}$	$\begin{array}{c}\forall x\, Fx \vee P \\ \hline \exists x\, Fx \vee P\end{array}$
نقض سور		$\begin{array}{c}\sim\forall x\, Fx \\ \hline\hline \exists x \sim Fx\end{array}$	$\begin{array}{c}\forall x \sim Fx \\ \hline\hline \sim\exists x\, Fx\end{array}$	$\begin{array}{c}\sim\forall x \sim Fx \\ \hline\hline \exists x\, Fx\end{array}$	$\begin{array}{c}\forall x\, Fx \\ \hline\hline \sim\exists x \sim Fx\end{array}$
جابجایی سورها	محمول دو موضعی	$\begin{array}{c}\forall x\, \forall y\, Fxy \\ \hline\hline \forall y\, \forall x\, Fxy\end{array}$	$\begin{array}{c}\exists x\, \exists y\, Fxy \\ \hline\hline \exists y\, \exists x\, Fxy\end{array}$	$\begin{array}{c}\exists x\, \forall y\, Fxy \\ \hline \forall y\, \exists x\, Fxy\end{array}$	
	عاطف، فاصل و دوشرطی	$\begin{array}{c}\exists x\, \forall y\, (Fx \wedge Gy) \\ \hline\hline \forall y\, \exists x\, (Fx \wedge Gy)\end{array}$	$\begin{array}{c}\exists x\, \forall y\, (Fx \vee Gy) \\ \hline\hline \forall y\, \exists x\, (Fx \vee Gy)\end{array}$	$\begin{array}{c}\exists x\, \forall y\, (Fx \leftrightarrow Gy) \\ \hline \forall y\, \exists x\, (Fx \leftrightarrow Gy)\end{array}$	
قوانین ورود و خروج سور در دامنه عاطف و فاصل		$\begin{array}{c}\forall x\, (Fx \wedge P) \\ \hline\hline \forall x\, Fx \wedge P\end{array}$	$\begin{array}{c}\exists x\, (Fx \wedge P) \\ \hline\hline \exists x\, Fx \wedge P\end{array}$	$\begin{array}{c}\forall x\, (Fx \vee P) \\ \hline\hline \forall x\, Fx \vee P\end{array}$	$\begin{array}{c}\exists x\, (Fx \vee P) \\ \hline\hline \exists x\, Fx \vee P\end{array}$

قوانین ورود و خروج سور کلی در دامنه شرطی

$$\begin{array}{c}\forall x\,(Fx \to P)\\ \hline\hline \exists x\,Fx \to P\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,(P \to Fx)\\ \hline\hline P \to \forall x\,Fx\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,(Fx \leftrightarrow P)\\ \hline \forall x\,Fx \leftrightarrow P\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,(Fx \leftrightarrow P)\\ \hline \forall x\,\forall y\,(Fx \leftrightarrow Fy)\end{array}$$

پخش‌پذیری سور

$$\begin{array}{c}\forall x\,(Fx \wedge Gx)\\ \hline\hline \forall x\,Fx \wedge \forall x\,Gx\end{array}\qquad \begin{array}{c}\exists x\,(Fx \wedge Gx)\\ \hline \exists x\,Fx \wedge \exists x\,Gx\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,Fx \wedge \exists x\,Gx\\ \hline \exists x\,(Fx \wedge Gx)\end{array}\qquad \begin{array}{c}\exists x\,Fx \wedge \forall x\,Gx\\ \hline \exists x\,(Fx \wedge Gx)\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\exists x\,(Fx \vee Gx)\\ \hline\hline \exists x\,Fx \vee \exists x\,Gx\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,Fx \vee \forall x\,Gx\\ \hline \forall x\,(Fx \vee Gx)\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,(Fx \vee Gx)\\ \hline \forall x\,Fx \vee \exists x\,Gx\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,(Fx \vee Gx)\\ \hline \exists x\,Fx \vee \forall x\,Gx\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\forall x\,(Fx \to Gx)\\ \hline \forall x\,Fx \to \forall x\,Gx\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,(Fx \to Gx)\\ \hline \exists x\,Fx \to \exists x\,Gx\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,(Fx \to Gx)\\ \hline \forall x\,Fx \to \exists x\,Gx\end{array}\qquad \begin{array}{c}\exists x\,Fx \to \forall x\,Gx\\ \hline \forall x\,(Fx \to Gx)\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)\\ \hline \forall x\,Fx \leftrightarrow \forall x\,Gx\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,(Fx \leftrightarrow Gx)\\ \hline \exists x\,Fx \leftrightarrow \exists x\,Gx\end{array}$$

فصل و وصل سور

$$\begin{array}{c}\forall x\,\forall y(Fx \to Gy)\\ \hline\hline \exists x\,Fx \to \forall y\,Gy\\ \hline\hline \forall y\,\forall x(Fx \to Gy)\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\forall x\,\forall y(Fx \wedge Gy)\\ \hline\hline \forall x\,Fx \wedge \forall y\,Gy\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,\exists y(Fx \wedge Gy)\\ \hline\hline \forall x\,Fx \wedge \exists y\,Gy\end{array}\qquad \begin{array}{c}\exists x\,\forall y(Fx \wedge Gy)\\ \hline\hline \exists x\,Fx \wedge \forall y\,Gy\end{array}\qquad \begin{array}{c}\exists x\,\exists y(Fx \wedge Gy)\\ \hline\hline \exists x\,Fx \wedge \exists y\,Gy\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\forall x\,\forall y(Fx \vee Gy)\\ \hline\hline \forall x\,Fx \vee \forall y\,Gy\end{array}\qquad \begin{array}{c}\forall x\,\exists y(Fx \vee Gy)\\ \hline\hline \forall x\,Fx \vee \exists y\,Gy\end{array}\qquad \begin{array}{c}\exists x\,\forall y(Fx \vee Gy)\\ \hline\hline \exists x\,Fx \vee \forall y\,Gy\end{array}\qquad \begin{array}{c}\exists x\,\exists y(Fx \vee Gy)\\ \hline\hline \exists x\,Fx \vee \exists y\,Gy\end{array}$$

هم‌ارزی سور کلی و جزیی

و

هم‌ارزی عاطف و فاصل

$$\begin{array}{c}\forall x\,Fx\\ \hline\hline \forall x\,\forall y(Fx \vee Fy)\\ \hline\hline \forall x\,\forall y(Fx \wedge Fy)\\ \hline\hline \exists x\,\forall y(Fx \wedge Fy)\\ \hline\hline \forall x\,\exists y(Fx \wedge Fy)\end{array}\qquad \begin{array}{c}\exists x\,Fx\\ \hline\hline \exists x\,\exists y(Fx \wedge Fy)\\ \hline\hline \exists x\,\exists y(Fx \vee Fy)\\ \hline\hline \exists x\,\forall y(Fx \vee Fy)\\ \hline\hline \forall x\,\exists y(Fx \vee Fy)\end{array}$$

۲. نشان دهید که برهان قواعد و قضایای زیر در منطق کلاسیک، محدودیت‌های ربطی را مراعات نمی‌کند.

قوانین غیر ربطی سور

جابجایی سورها (شرطی)	$\begin{array}{c} \exists x\, \forall y\, (Fx \to Gy) \\ \hline\hline \forall y\, \exists x\, (Fx \to Gy) \end{array}$		$\begin{array}{c} \forall x\, \exists y(Fx \leftrightarrow P) \\ \hline\hline \exists y\, \exists z\, \forall x\, [(Fx \to Gy) \wedge (Gz \to Fx)] \end{array}$
قوانین ورود و خروج سور جزیی در دامنه شرطی	$\begin{array}{c} \exists x\, (P \to Fx) \\ \hline\hline P \to \exists x\, Fx \end{array}$	$\begin{array}{c} \exists x\, (Fx \to P) \\ \hline\hline \forall x\, Fx \to P \end{array}$ $\begin{array}{c} \exists x\, Fx \leftrightarrow P \\ \hline \exists x\, (Fx \leftrightarrow P) \end{array}$	$\begin{array}{c} (Fa \to P) \wedge (P \to Fb) \\ \hline \exists x(Fx \leftrightarrow P) \end{array}$ $\begin{array}{c} \exists x(Fx \leftrightarrow P) \\ \hline\hline \exists x(Fx \to P) \wedge \exists x(P \to Fx) \end{array}$
پخش‌پذیری سور	$\begin{array}{c} \exists x\, (Fx \to Gx) \\ \hline\hline \forall x\, Fx \to \exists x\, Gx \end{array}$	$\begin{array}{c} \exists x\, (Fx \wedge Gx) \\ \hline \exists x\, Fx \wedge \exists x\, Gx \end{array}$	$\begin{array}{c} \exists x\, Fx \to \exists x\, Gx \\ \hline \exists x\, (Fx \to Gx) \end{array}$
فصل و وصل سور	$\begin{array}{c} \exists x\, \exists y(Fx \to Gy) \\ \hline\hline \forall x\, Fx \to \exists y\, Gy \\ \hline\hline \exists y\, \exists x(Fx \to Gy) \end{array}$	$\begin{array}{c} \exists x\, \forall y(Fx \to Gy) \\ \hline\hline \forall x\, Fx \to \forall y\, Gy \\ \hline\hline \forall y\, \exists x(Fx \to Gy) \end{array}$	$\begin{array}{c} \forall x\, \exists y(Fx \to Gy) \\ \hline\hline \exists x\, Fx \to \exists y\, Gy \\ \hline\hline \exists y\, \forall x(Fx \to Gy) \end{array}$
قضایا	$\exists x\, (\exists y\, Fy \to Fx)$ $\exists x\, (Fx \to \forall y Fy)$	$\exists x \forall y\, (Fx \to Fy)$ $\exists y \forall x\, (Fx \to Fy)$	$\exists x \forall y(\forall z Fyz \to Fxy)$

نکته‌ای که در اینجا باید خاطر نشان کنیم این است که ما در بیان قواعد از روش ایروینگ کپی، با تغییرات جزیی، استفاده کردیم. این روش، دست کم، دو برتری بر روش استنتاج طبیعی استانیسلاو یاکوفسکی ۱۹۳۴ و گرهارت گنتزن ۱۹۳۴ دارد. مهم‌ترین تفاوت روش اخیر با روش کپی در قاعده حذف سور جزیی است. این قاعده را یاکوفسکی و گنتزن به صورت زیر آورده‌اند:

حذف $\exists$

$$\begin{array}{ll} & \exists x\, Fx \\ & \left|\begin{array}{l} F(\alpha/x) \\ \vdots \\ P \end{array}\right. \\ \hline \therefore & P \end{array}$$

مشروط به اینکه

α هیچ موردی در P نداشته باشد

α در هیچ فرض بازی، پیش از فرض این برهانک، مورد نداشته باشد

این قاعده شبیه قاعده حذف فاصل است:

حذف ∨

$$\begin{array}{l|l} & P \vee Q \\ \hline & P \\ & \vdots \\ & R \\ \hline \\ \hline & Q \\ & \vdots \\ & R \\ \hline \therefore & R \end{array}$$

در این روش، برخی از قواعد ربطی سورها به کمک قواعد ربطی گزاره‌ها و قواعد کلاسیک سورها قابل اثبات نیستند و ناچاریم برخی از این قواعد را به عنوان قاعده اصلی به قواعد بیفزاییم. قاعده خروج سور جزیی از دامنه عاطف یا قاعده ورود سور کلی به دامنه فاصل می‌تواند این خلأ را جبران کند:

قاعده خروج سور جزیی از دامنه عاطف

$$\frac{P \wedge \exists x\, Fx}{\exists x\, (P \wedge Fx)}$$

قاعده ورود سور کلی به دامنه فاصل

$$\frac{\forall x\, (Fx \vee P)}{\forall x\, Fx \vee P}$$

این دو قاعده شبیه قاعده پخش‌پذیری عاطف بر فاصل و عکس پخش‌پذیری فاصل بر عاطف هستند:

قاعده پخش‌پذیری عاطف بر فاصل

$$\frac{P \wedge (Q \vee R)}{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$$

عکس پخش‌پذیری فاصل بر عاطف

$$\frac{(P \vee R) \wedge (Q \vee R)}{(P \wedge Q) \vee R}$$

شباهت آن دو قاعده سورها با این دو قاعده گزاره‌ها را، هنگامی که دامنه دو عضوی باشد، با جایگزین کردن سورهای کلی و جزیی با عاطف و فاصل، بهتر می‌توان مشاهده کرد:

$$\frac{P \wedge (Fa \vee Fb)}{(P \wedge Fa) \vee (P \wedge Fb)} \qquad \frac{(Fa \vee R) \wedge (Fb \vee R)}{(Fa \wedge Fb) \vee R}$$

و این نشان می‌دهد که چرا قاعده ورود سور کلی به دامنه فاصل و خروج سور جزیی از دامنه عاطف قابل اثبات نیستند و باید به عنوان قاعده اصلی افزوده شوند.

با توجه به آنچه گفته شد، دو برتریِ روش کپی بر روش‌های رقیب، یکی ساده شدن قاعده حذف فاصل و دیگری بی‌نیازی به افزودن قواعد جدید به قواعد اصلی است. قاعده‌ای برای حذف فاصل، مشابه با قاعده کپی برای حذف ∃ ، اندرسون و بلنپ ۱۹۷۵ ص ۳۴۸ ارائه کرده‌اند:

حذف ∨ به روش اندرسون و بلنپ:

f, g	(k)	$P \vee Q$	
f, g	(m)	P	ورود به سطر اول برهانک فصلی
⋮	⋮	⋮	
f, g, i, j	(n)	R	
f, g	(n+1)	Q	ورود به سطر اول برهانک فصلی
⋮	⋮	⋮	
f, g, i, j	(o)	R	
∴ f, g, i, j	(o+1)	R	خروج از دو برهانک فصلی

در این قاعده، نوع جدیدی از برهانک به کار رفته است که با فرض آغاز نمی‌شود (شبیه برهانک ضروری در منطق وجهی) و ما این برهانک را «برهانک فصلی» نامیده‌ایم. قاعده حذف فاصل، در این روش، در حقیقت، به دو قاعده ورود و خروج تحویل یافته است: «قاعده ورود به برهانک فصلی» می‌گوید که هر مؤلفه فصلی را می‌توان به سطر اول یک و تنها یک برهانک فصلی وارد کرد؛ نتیجه بر فرض‌های فرمول فصلی استوار است. «قاعده خروج از برهانک فصلی» می‌گوید اگر یک فرمول در دو برهانک فصلی بر فرض‌های یکسانی استوار بود می‌تواند از این برهانک‌ها خارج شود؛ نتیجه بر همین فرض‌ها استوار خواهد بود.

یکی از امتیازات این روش بیان قاعده حذف فاصل این است که دیگر لازم نیست قاعده پخش‌پذیری عاطف بر فاصل را به عنوان قاعده‌ای اصلی به مجموعه قواعد بیفزاییم زیرا این پخش‌پذیری با این قاعده حذف فاصل قابل اثبات است:

$$\frac{P \wedge (Q \vee R)}{(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)}$$ پخش‌پذیری عاطف برفاصل

1	1	$P \wedge (Q \vee R)$	مقدمه
1	2	P	ح ∧ ۱
1	3	$Q \vee R$	ح ∧ ۱
1	4	Q	ورود به سطر اول برهانک فصلی ۳
1	5	$P \wedge Q$	م ∧ ۲ و ۴
1	6	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	م ∨ ۵
1	7	R	ورود به سطر اول برهانک فصلی ۳

1	8	$P \wedge R$	م ∧ ۲ و ۷
1	9	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	م ∨ ۸
1	10	$(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	خروج از برهانک فصلی ۶ و ۹

علی رغم این برتری‌ها، به دلیل اینکه قاعده حذف فاصل، برخلاف قاعده حذف $\exists$ ، از دو برهانک استفاده می‌کند، قاعده اندرسون و بلنپ پارادوکس‌هایی را تولید کرده است. این پارادوکس‌ها را مایکل دان و باب مایر کشف کرده‌اند (آلسدایر اورکوهارت ۱۹۸۹، ص ۱۶۹.) در زیر، یکی از این پارادوکس‌ها را با روش اندرسون و بلنپ اثبات می‌کنیم:

پارادوکس قابل اثبات

$$\frac{[P \rightarrow (Q \vee R)] \wedge (R \rightarrow S)}{P \rightarrow (Q \vee S)}$$

1	1	$[P \rightarrow (Q \vee R)] \wedge (R \rightarrow S)$	مقدمه
1	2	$P \rightarrow (Q \vee R)$	ح ∧ ۱
1	3	$R \rightarrow S$	ح ∧ ۱
4	4	P	فرض
1 , 4	5	$Q \vee R$	وضع مقدم ۲ و ۴
1 , 4	6	Q	ورود به سطر اول برهانک فصلی ۵
1 , 4	7	$Q \vee S$	م ∨ ۶
1 , 4	8	R	ورود به سطر اول برهانک فصلی ۵
1 , 4	9	S	وضع مقدم ۳ و ۸
1 , 4	10	$Q \vee S$	م ∨ ۹
1 , 4	11	$Q \vee S$	خروج از برهانک فصلی ۷ و ۱۰
1	12	$P \rightarrow (Q \vee S)$	دلیل شرطی ۴ – ۱۱

نادرستی این پارادوکس در این است که اگر سطر ۶ و ۸ را به عنوان فرض در نظر بگیریم سطر آخر برهانکشان دارای فرض‌های ناهمسان خواهد شد. برای رسیدن به همسانی فرض‌ها، باید $Q \rightarrow Q$ را به مقدمه بیفزاییم. به عبارت دیگر، صورت درست این قاعده به صورت زیر است:

قاعده مشابه اما معتبر

$$\frac{[P \rightarrow (Q \vee R)] \wedge (Q \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)}{P \rightarrow (Q \vee S)}$$

آلسدایر اورکوهارت، که قاعده اندرسون و بلنپ به مذاقش خوش آمده و آن را با شهودهای خود موافق یافته است، در ادامه نقل این پارادوکس، چنین می‌گوید: «با این [پارادوکس] چه کنیم؟ نظر من این است: بدا به حال R ! [علامت تعجب از اورکوهارت است.] شهودهای من در باب ترکیب فصلی به اعتبار این فرمول رأی می‌دهد. اگر این فرمول در R نامعتبر است پس R توجیه نادرستی از ترکیب فصلی ارائه داده است. چنان که دیده‌ایم، قواعد ترکیب فصلی در R، آشکارا، موقتی و من در آوردی (ad hoc) است. (با نظر به ماهیت این قواعد،) کاملا ممکن است که برخی قواعد معتبر [از قواعد منطق R]حذف شده‌اند. در واقع، این احتمال وجود دارد که قاعده پیش گفته تنها قاعده حذف شده نباشد، زیرا تاکنون، کسی در اصل موضوعی کردن این نظام استنتاج طبیعی جدید کامیاب نبوده است.» همان صص ۱۶۹ – ۱۷۰. اورکوهارت، در پایان مقاله خود، افزوده‌ای دارد که بیان می‌کند کیت فاین این نظام را اصل موضوعی کرده و شارلوود ۱۹۸۱ برهان آن را با افزوده‌هایی گزارش کرده است. همان ص ۱۷۴.

به نظر می‌رسد که اورکوهارت تنها قواعد فاصل در منطق ربط را موقتی و من در آوردی می‌داند و قواعد عاطف را از این ویژگی مبرا می‌بیند. این دیدگاه ناسازگار است زیرا اورکوهارت که پارادوکس گفته شده را قاعده‌ای معتبر می‌شناسد باید این نمونه جانشین آن را نیز بپذیرد:

نمونه‌ای از پارادوکس قابل اثبات

$$\frac{[\sim P \rightarrow (\sim Q \vee \sim R)] \wedge (\sim R \rightarrow \sim S)}{\sim P \rightarrow (\sim Q \vee \sim S)}$$

این نمونه، به کمک قواعد عکس نقیض و دمورگان به پارادوکس زیر منتهی می‌شود:

پارادوکس جدید

$$\frac{[(Q \wedge R) \rightarrow P] \wedge (S \rightarrow R)}{(Q \wedge S) \rightarrow P}$$

و با کمی جابجایی و نمونه جانشین سازی، به پارادوکس زیر می‌رسیم:

$$\frac{(P \rightarrow Q) \wedge [(Q \wedge R) \rightarrow S]}{(P \wedge R) \rightarrow S}$$

برهان کلاسیک این قاعده نشان می‌دهد که اورکوهارت ناگزیر است قواعد عاطف در منطق ربط را نیز تغییر دهد و آنها را از من در آوردی بودن برهاند. این برهان را بررسی می‌کنیم:

پارادوکس جدید قابل اثبات

$$\frac{(P \rightarrow Q) \wedge [(Q \wedge R) \rightarrow S]}{(P \wedge R) \rightarrow S}$$

1	1	$(P \rightarrow Q) \wedge [(Q \wedge R) \rightarrow S]$	مقدمه
1	2	$P \rightarrow Q$	ح ∧ ۱

1	3	$(Q \wedge R) \rightarrow S$	ح ∧ ۱
4	4	$P \wedge R$	فرض
4	5	P	حذف ∧ ۴
4	6	R	حذف ∧ ۴
1 , 4	7	Q	وضع مقدم ۲ و ۵
1 , 4	8	$Q \wedge R$	معرفی ∧ ۶ و ۷
1 , 4	9	S	وضع مقدم ۳ و ۸
1	10	$(P \wedge R) \rightarrow S$	دلیل شرطی ۴ – ۹

چنان‌که می‌بینیم، سطر ۸ قاعده معرفی عاطف را بر سطرهای ۶ و ۷ به کار برده است که فرض‌های یکسانی ندارند. اورکوهارت ناچار است به نحوی قاعده معرفی عاطف را تغییر دهد تا با قاعده حذف فاصل متناسب شود. شاید چاره او در این باشد که شرط مربوط به معرفی عاطف را چنین تغییر دهد:

محدودیت قاعده معرفی عاطف (برای اورکوهارت): تنها فرمول‌هایی را می‌توان با هم عطف کرد که مجموعه فرض‌های یکی زیرمجموعه فرض‌های دیگری باشد.

البته باید لوازم و نتایج این محدودیت را بررسی کرد و میزان موفقیت و شکست آن را تعیین نمود و باید دید که آیا این قاعده آثار زیان‌بار دیگری، علاوه بر آنچه اورکوهارت آورده است، به بار می‌آورد یا نه. یکی از این لوازم، قاعده جذب عاطف است که بر اساس آن، قاعده جذب فاصل نیز نتیجه می‌شود و این نتیجه البته از قاعده اندرسون و بلنپ برای حذف فاصل قابل اثبات نیست و بنابراین، اورکوهارت آن را نخواهد پذیرفت. پس باید در پی محدودیتی از نوع دیگر برای معرفی عاطف بود؛ از این رو، مسأله باز است و پژوهش‌های بیشتری را می‌طلبد.

سورهای گزاره‌ای

برای رسیدن به منطق ربط سورهای گزاره‌ای، کافی است قواعد سورهای گزاره‌ای کلاسیک را، بی هیچ کم و کاست، به منطق ربط گزاره‌ها بیفزاییم. در جدول زیر، قواعد اصلی منطق سورهای گزاره‌ای را به سبک ایروینگ کپی آورده‌ایم. برای گزاره‌های خاص، از حروف بزرگ مانند A، B، C، و P، Q، و R استفاده می‌کنیم. برای گزاره‌های بدلی، حروف بزرگ اواسط، مانند I، J، K، L، M و N را به کار می‌بریم و حروف کوچک، مانند p، q و r نیز برای متغیرهای فردی به کار خواهند رفت. α برای اشاره به گزاره‌های خاص یا بدلی به کار می‌رود. با این بیان، قواعد عبارتند از:

گزاره‌های خاص: حروف بزرگ لاتین مانند A، B، C، و P، Q و R

گزاره‌های بدلی: حروف بزرگ اواسط، مانند I، J، K، L، M و N

متغیرهای گزاره‌ای: حروف کوچک اواخر، مانند p، q و r

قواعد منطق سورها:

معرفی سور وجودی	حذف سور کلی
$\dfrac{F(G)}{\exists pF(p//G)}$	$\dfrac{\forall pF(p)}{F(G/p)}$
حذف سور وجودی	**معرفی سور کلی**
$\dfrac{\exists pF(p)}{F(\beta/p)}$ β باید گزاره بدلی و جدید باشد.	$\dfrac{F(\beta)}{\forall pF(p/\beta)}$ β نباید در فرض‌های باز حضور داشته باشد. $F(\beta)$ نباید شامل هیچ گزاره بدلی باشد.

G برای اشاره به گزاره‌های اتمی و مولکولی است. (در دو قاعده بالایی، G می‌تواند گزاره خاص یا بدلی و قدیم یا جدید و اتمی یا مولکولی باشد. امکان قرار دادن یک گزاره مرکب به جای متغیر گزاره‌ای با سور کلی یکی از امکانات پیشرفته منطق سورهای گزاره‌ای است)

β برای اشاره به گزاره‌های خاص یا بدلی

$F(p)$ یعنی عبارتی شامل دست کم یک متغیر گزاره‌ای p

$F(\beta/p)$ یعنی همان عبارت که β به جای همه موارد p نشسته است

$F(G/p)$ یعنی همان عبارت که G به جای همه موارد p نشسته است

$F(\beta)$ یعنی عبارتی شامل دست کم یک گزاره β

$F(G)$ یعنی عبارتی شامل دست کم یک گزاره G

$F(p/\beta)$ یعنی همان عبارت که p به جای همه موارد β نشسته است

$F(p/ G)$ یعنی همان عبارت که p به جای همه موارد G نشسته است

$F(p// G)$ یعنی همان عبارت که p به جای همه یا بعضی موارد G نشسته است

با افزودن قواعد سور کلاسیک (یعنی همین قواعد گفته شده) به منطق ربط گزاره‌ها، به منطق ربط سورها می‌رسیم.

در منطق کلاسیک، همه ادات‌های تابع ارزشی را می‌توان با ادات ناقض و یکی از ادات‌های شرطی، فاصل یا عاطف تعریف کرد.

$$\sim A \;\left|\; \begin{array}{l} A \to F \\ A \to (P \wedge \sim P) \end{array}\right.$$

$$F \;\left|\; \begin{array}{l} \sim (P \to P) \\ P \wedge \sim P \\ \sim T \end{array}\right. \qquad T \;\left|\; \begin{array}{l} P \to P \\ P \vee \sim P \\ \sim F \end{array}\right.$$

$$A \wedge B \;\left|\; \begin{array}{l} \sim (A \to \sim B) \\ \sim (\sim A \vee \sim B) \\ (A \to (B \to F)) \to F \\ ((A \to F) \vee (B \to F)) \to F \end{array}\right. \qquad A \vee B \;\left|\; \begin{array}{l} \sim A \to B \\ \sim (\sim A \wedge \sim B) \\ (A \to (B \to F)) \to F \\ ((A \to F) \vee (B \to F)) \to F \end{array}\right.$$

هم‌چنین، هر یک از سورهای فردی کلی و جزیی نیز می‌تواند بر اساس یک سور گزاره‌ای و ادات ناقض تعریف شود:

$$\forall x\, Fx \left|\begin{array}{l} \sim \exists x \sim Fx \\ \exists x\, (Fx \to F) \to F \end{array}\right. \qquad \exists x\, Fx \left|\begin{array}{l} \sim \forall x \sim Fx \\ \exists x\, (Fx \to F) \to F \end{array}\right.$$

وقتی سورهای گزاره‌ای به این منطق افزوده شود ادات نافض با این سورها قابل تعریف است: $\sim A$ را می‌توان به $A \to \forall p\, p$ تعریف کرد. دلیل این مطلب این است که این دو فرمول هم‌ارز هستند و برای هم‌ارزی آنها، برهان ساده زیر را می‌توان ارائه کرد:

1	1	$\sim A$	فرض
2	2	A	فرض
3	3	$\sim \forall p\, p$	فرض
1 , 2	4	$A \wedge \sim A$	م ∧ (۱ و ۲)
1 , 2	5	$\sim\sim \forall p\, p$	برهان خلف (۳ – ۴)
1 , 2	6	$\forall p\, p$	ن م (۵)
1	7	$A \to \forall p\, p$	د ش (۲ – ۶)
8	8	$A \to \forall p\, p$	فرض
9	9	A	فرض
8 , 9	10	$\forall p\, p$	و م (۸ و ۹)
8 , 9	11	$\sim A$	حذف ∀ (۱۰)
8 , 9	12	$A \wedge \sim A$	م ∧ (۹ و ۱۱)
8	13	$\sim A$	برهان خلف (۳ – ۴)
	14	$\sim A \leftrightarrow (A \to \forall p\, p)$	م ↔ (۱ – ۷ و ۸ – ۱۳)

در این برهان، تنها قواعد منطق گزاره‌ها به کار رفته است به جز در سطر ۱۱ که حذف سور را به کار برده‌ایم. نکته در خور توجه در این سطر این است که پس از حذف سور، به جای p، نه یک گزاره اتمی، بلکه یک گزاره مرکب، یعنی $\sim A$، جانشین شده است. اینکه بتوانیم گزاره‌های مرکب را جانشین متغیرهای گزاره‌ای کنیم مهم‌ترین ویژگی و امتیاز منطق سورهای گزاره‌ای است. باید دقت داشت که در معرفی سور کلی، نمی‌توانیم متغیر گزاره‌ای را جانشین یک گزاره مولکولی و مرکب کنیم و این عدم تقارن بین قواعد معرفی و حذف سور، یکی از تفاوت‌های مهم منطق مرتبه اول با منطق سورهای گزاره‌ای است.

به جای برهان طولانی بالا، می‌توانستیم از برهان کوتاه‌تری استفاده کنیم. برای این منظور، کافی بود به هم‌ارزی $\sim A \leftrightarrow (A \to (B \wedge \sim B))$ از منطق‌گزاره‌ها توجه می‌کردیم. در این صورت، با اثبات $\forall p\, p \leftrightarrow (B \wedge \sim B)$، به قضیه بالا می‌رسیدیم. برهان هم‌ارزی اخیر بسیار کوتاه‌تر است زیرا طرف چپ به راست آن (استنتاج یک گزاره از تناقض) از

قضایای منطق کلاسیک گزاره‌هاست و طرف راست به چپ آن نیز چیزی نیست جز حذف سور کلی و جانشین کردن یک گزاره مرکب، یعنی $B \wedge {\sim}B$ ، به جای متغیر گزاره‌ای p .

از آنجا که ناقض به وسیله سور کلی گزاره‌ای قابل تعریف است، در منطق سورهای گزاره‌ای کلاسیک، همه اادات‌های تابع ارزشی را می‌توان تنها با یک ادات تابع ارزشی و یک سور گزاره‌ای تعریف کرد. برای نمونه، ترکیب عطفی، ترکیب فصلی، سور وجودی، ناقض و تناقض را می‌توان، با ادات شرطی و سور کلی، به چند روش تعریف کرد. در زیر تعریف‌های گوناگونی برای این ادات‌ها می‌آوریم:

$$A \wedge B \left| \begin{array}{l} \forall p\{ [A \to (B \to p)] \to p \} \\ \sim (A \to {\sim}B) \\ [A \to (B \to \forall p\, p)] \to \forall p\, p \\ \sim ({\sim}A \vee {\sim}B) \\ [(A \to \forall p\, p) \vee (B \to \forall p\, p)] \to \forall p\, p \\ \forall p\{ [(A \to p) \vee (B \to p)] \to p \} \end{array} \right.$$

$$A \vee B \left| \begin{array}{l} {\sim}A \to B \\ (A \to \forall p\, p) \to B \\ \sim ({\sim}A \wedge {\sim}B) \\ [(A \to \forall p\, p) \wedge (B \to \forall p\, p)] \to \forall p\, p \\ \forall p\{ [(A \to p) \wedge (B \to p)] \to p \} \end{array} \right.$$

$$\forall x\, Fx \left| \begin{array}{l} \sim \exists x \sim Fx \\ \exists x\, (Fx \to \forall p\, p) \to \forall p\, p \\ \forall p\, [\exists x\, (Fx \to p) \to p] \end{array} \right.$$

$$\exists x\, Fx \left| \begin{array}{l} \sim \forall x \sim Fx \\ \forall x\, (Fx \to \forall p\, p) \to \forall p\, p \\ \forall p\, [\forall x\, (Fx \to p) \to p] \end{array} \right.$$

$$F \left| \begin{array}{l} {\sim}T \\ T \to \forall p\, p \\ \exists p\, p \to \forall p\, p \\ \exists p\, {\sim}(p \to p) \\ \forall p\, {\sim}(p \to p) \\ \exists p\, (p \wedge {\sim}p) \\ \forall p\, (p \wedge {\sim}p) \\ \forall p\, p \\ \exists p\, \{p \wedge \forall q\, [(q \to p) \to p] \to q\} \end{array} \right.$$

$$T \left| \begin{array}{l} {\sim}F \\ F \to \forall p\, p \\ \forall p\, p \to \forall p\, p \\ \exists p\, (p \to p) \\ \forall p\, (p \to p) \\ \exists p\, (p \vee {\sim}p) \\ \forall p\, (p \vee {\sim}p) \\ \exists p\, p \\ \forall p\, (p \to p) \end{array} \right.$$

$${\sim}A \left| \begin{array}{l} A \to F \\ A \to \forall p\, p \\ A \to \exists p\, \{p \wedge \forall q\, [(q \to p) \to p] \to q\} \end{array} \right.$$

اگر دقت کرده باشید، بسیاری از تعریف‌های بالا، از تعریف‌های منطق گزاره‌ها، به کمک هم‌ارزی $(A \to \forall p\, p) \leftrightarrow {\sim}A$ به دست آمده‌اند. برای نمونه، تعریف سوم و پنجم برای ترکیب عطفی، $A \wedge B$، با هم‌ارزی گفته شده، به ترتیب، از تعریف دوم و چهارم به دست آمده است. با این حال، تعریف اول و ششم برای ترکیب عطفی تعریف‌هایی جدید هستند که ارتباطشان با منطق سورهای گزاره‌ای بسیار عمیق‌تر است. این تعریف‌ها را در زیر به طور جداگانه آورده‌ایم:

$$A \wedge B \left| \begin{array}{l} \forall p\{ [A \to (B \to p)] \to p \} \\ \forall p\{ [(A \to p) \vee (B \to p)] \to p \} \end{array} \right.$$

$$A \vee B \left| \begin{array}{l} \forall p\{ [(A \to p) \wedge (B \to p)] \to p \} \end{array} \right.$$

$$\forall x\, Fx \left| \begin{array}{l} \forall p\, [\exists x\, (Fx \to p) \to p] \end{array} \right.$$

$$\exists x\, Fx \left| \begin{array}{l} \forall p\, [\forall x\, (Fx \to p) \to p] \end{array} \right.$$

$$F \left| \begin{array}{l} \exists p\, p \to \forall p\, p \\ \exists p\, (p \wedge {\sim}p) \\ \forall p\, (p \wedge {\sim}p) \\ \forall p\, p \\ \exists p\, \{p \wedge \forall q\, [(q \to p) \to p] \to q\} \end{array} \right.$$

$$T \left| \begin{array}{l} \forall p\, p \to \forall p\, p \\ \exists p\, (p \vee {\sim}p) \\ \forall p\, (p \vee {\sim}p) \\ \exists p\, p \\ \forall p\, (p \to p) \end{array} \right.$$

$\sim A \quad \mid A \rightarrow \exists p \{p \wedge \forall q [((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]\}$

برهان:

$$(A \wedge B) \leftrightarrow \forall p\{ [A \rightarrow (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$$

1	1	$A \wedge B$	فرض
2	2	$A \rightarrow (B \rightarrow p)$	فرض
1	3	A	ح ∧ (۱)
1	4	B	ح ∧ (۱)
1 , 2	5	$B \rightarrow p$	و م (۲ و ۳)
1 , 2	6	p	و م (۴ و ۵)
1	7	$[A \rightarrow (B \rightarrow p)] \rightarrow p$	د ش (۲ – ۶)
1	8	$\forall p\{ [A \rightarrow (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$	م ∀ (۷)
9	9	$\forall p\{ [A \rightarrow (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$	فرض
9	10	$[A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))] \rightarrow (A \wedge B)$	ح ∀ (۹)
	11	$[A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))]$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
9	12	$A \wedge B$	و م (۱۰ و ۱۱)
	13	$(A \wedge B) \leftrightarrow \forall p\{ [A \rightarrow (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$	م ↔ (۱ – ۸) (۹ – ۱۲)

$$(A \wedge B) \leftrightarrow \forall p\{ [(A \rightarrow p) \vee (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$$

1	1	$A \wedge B$	فرض
2	2	$(A \rightarrow p) \vee (B \rightarrow p)$	فرض
	3	$[(A \rightarrow p) \vee (B \rightarrow p)] \rightarrow ((A \wedge B) \rightarrow p)$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
2	4	$(A \wedge B) \rightarrow p$	و م (۲ و ۳)
1 , 2	5	p	و م (۴ و ۱)
1	6	$[(A \rightarrow p) \vee (B \rightarrow p)] \rightarrow p$	د ش (۲ – ۵)
1	7	$\forall p\{ [(A \rightarrow p) \vee (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$	م ∀ (۶)
8	8	$\forall p\{ [(A \rightarrow p) \vee (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$	فرض
8	9	$[(A \rightarrow (A \wedge B)) \vee (B \rightarrow (A \wedge B))] \rightarrow (A \wedge B)$	ح ∀ (۸)
	10	$(A \rightarrow (A \wedge B)) \vee (B \rightarrow (A \wedge B))$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
8	11	$A \wedge B$	و م (۱۰ و ۹)
	12	$(A \wedge B) \leftrightarrow \forall p\{ [A \rightarrow (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$	م ↔ (۱ – ۷) (۸ – ۱۱)

$(A \vee B) \leftrightarrow \forall p\{ [(A \rightarrow p) \wedge (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$

1	1	$A \vee B$	فرض
2	2	$(A \rightarrow p) \wedge (B \rightarrow p)$	فرض
	3	$[(A \rightarrow p) \wedge (B \rightarrow p)] \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow p)$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
2	4	$(A \vee B) \rightarrow p$	و م (۲ و ۳)
1 , 2	5	p	و م (۴ و ۱)
1	6	$[(A \rightarrow p) \wedge (B \rightarrow p)] \rightarrow p$	د ش (۲ – ۵)
1	7	$\forall p\{ [(A \rightarrow p) \wedge (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$	م ∀ (۶)
8	8	$\forall p\{ [(A \rightarrow p) \wedge (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$	فرض
8	9	$[(A \rightarrow (A \vee B)) \wedge (B \rightarrow (A \vee B))] \rightarrow (A \vee B)$	ح ∀ (۸)
	10	$(A \rightarrow (A \vee B)) \wedge (B \rightarrow (A \vee B))$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
8	11	$A \vee B$	و م (۱۰ و ۹)
	12	$(A \vee B) \leftrightarrow \forall p\{ [A \rightarrow (B \rightarrow p)] \rightarrow p \}$	م ↔ (۱ – ۷) (۸ – ۱۱)

$\forall x\, Fx \leftrightarrow \forall p\, [\exists x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p]$

1	1	$\forall x\, Fx$	فرض
2	2	$\exists x\, (Fx \rightarrow p)$	فرض
	3	$\exists x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow (\forall x\, Fx \rightarrow p)$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
2	4	$\forall x\, Fx \rightarrow p$	و م (۲ و ۳)
1 , 2	5	P	و م (۴ و ۱)
1	6	$\exists x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p$	د ش (۲ – ۵)
1	7	$\forall p\, [\exists x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p\,]$	م ∀ (۶)
8	8	$\forall p\, [\exists x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p\,]$	فرض
8	9	$\exists x\, (Fx \rightarrow \forall x\, Fx) \rightarrow \forall x\, Fx$	ح ∀ (۸)
	10	$\exists x\, (Fx \rightarrow \forall x\, Fx)$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
8	11	$\forall x\, Fx$	و م (۱۰ و ۹)
	12	$\forall x\, Fx \leftrightarrow \forall p\, [\exists x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p]$	م ↔ (۱ – ۷) (۸ – ۱۱)

$$\exists x\, Fx \leftrightarrow \forall p\, [\forall x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p]$$

1	1	$\exists x\, Fx$	فرض
2	2	$\forall x\, (Fx \rightarrow p)$	فرض
	3	$\forall x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow (\exists x\, Fx \rightarrow p)$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
2	4	$\exists x\, Fx \rightarrow p$	و م (۲ و ۳)
1 , 2	5	P	و م (۴ و ۱)
1	6	$\forall x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p$	د ش (۲ – ۵)
1	7	$\forall p\, [\forall x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p\,]$	م ∀ (۶)
8	8	$\forall p\, [\forall x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p\,]$	فرض
8	9	$\forall x\, (Fx \rightarrow \exists x\, Fx) \rightarrow \exists x\, Fx$	ح ∀ (۸)
	10	$\forall x\, (Fx \rightarrow \exists x\, Fx)$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
8	11	$\exists x\, Fx$	و م (۱۰ و ۹)
	12	$\exists x\, Fx \leftrightarrow \forall p\, [\forall x\, (Fx \rightarrow p) \rightarrow p]$	م ↔ (۱ – ۷) (۸ – ۱۱)

برهان هم‌ارزی‌های مربوط به صدق و کذب و نقیض همگی آسان است به جز یکی که در زیر، به طور کامل آن را می‌آوریم:

$$F \leftrightarrow \exists p\, \{p \wedge \forall q\, [((q \rightarrow p) \rightarrow p \rightarrow q]\}$$

	1	$\sim\sim A \rightarrow A$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها
	2	$((A \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow A$	تعریف ~ به F (۱)
	3	$\forall q\, [((q \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow q]$	م ∀ (۲)
4	4	F	فرض
4	5	$F \wedge \forall q\, [((q \rightarrow F) \rightarrow F) \rightarrow q]$	م ∧ (۳ و ۴)
4	6	$\exists p\, \{p \wedge \forall q\, [((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]\}$	م ∃ (۵)
7	7	$\exists p\, \{p \wedge \forall q\, [((q \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow q]\}$	فرض
7	8	$A \wedge \forall q\, [((q \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow q]$	ح ∃ (۷)
7	9	A	ح ∧ (۸)
7	10	$\forall q\, [((q \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow q]$	ح ∧ (۸)
7	11	$((\sim A \rightarrow A) \rightarrow A) \rightarrow \sim A$	ح ∀ (۱۰)
7	12	$(\sim A \rightarrow A) \rightarrow A$	قضیه منطق کلاسیک گزاره‌ها

7	13	$\sim A$	و م (۱۱ و ۱۲)
7	14	$A \wedge \sim A$	م ∧ (۱۳ و ۹)
7	15	F	هم‌ارزی F و تناقض در منطق کلاسیک
	16	$F \leftrightarrow \exists p \{p \wedge \forall q [((q \to p) \to p \to q]\}$	م ↔ (۴ – ۶) (۷ – ۱۶)

تمرین:

۱. کدام یک از برهان‌های بالا، محدودیت‌های گفته شده در بخش منطق گزاره‌ها را دارند و بنابراین ربطی هستند؟

۲. در کدام یک از برهان‌های بالا، قضیه‌ای از قضایای منطق کلاسیک به کار رفته است که در منطق ربط معتبر نیست؟

با توجه به تمرین پیشین، در می‌یابیم که بسیاری از تعریف‌های بالا نمی‌توانند در منطق ربط، درست تلقی شوند. برای نمونه،

۱. تعریف اول و آخر برای ترکیب عطفی، در منطق ربط، نادرستند زیرا هر دو تعریف ضعیف‌تر از ترکیب عطفی هستند. با وجود این، تعریف اول را می‌توان به نحوی نگاه داشت: این تعریف، در حقیقت، تعریف تلفیق است.

۲. به همین صورت، تعریف آخر سور کلی فردی نیز ضعیف‌تر از این سور است و بنابراین، نادرست است.

۳. هم‌چنین، تعریف آخر F معادل تعریف‌های دیگر F نیست بلکه از آنها ضعیف‌تر است. این تعریف، در حقیقت، تعریف تناقض ضعیف، یعنی تعریف f، است. بر همین اساس، تعریف نقیض، دیگر، به استلزام تناقض قوی تعریف نمی‌شود بلکه باید به استلزام تناقض ضعیف تعریف شود. استلزام تناقض قوی را می‌توان تعریفی برای نوع جدیدی نقیض دانست که به نقیض بولی شهرت دارد و غالبا، با نماد «¬» نمایش داده می‌شود.

۴. به همین دلیل، هر جا که در منطق کلاسیک، $\sim A$ را به $A \to F$ و یا $A \to \forall p\, p$ تعریف کرده بودیم باید به $A \to f$ تعریف شود.

۵. از آنجا که f و F معادل نیستند، t و T نیز معادل نخواهند بود و در واقع، تعریف T به $\forall p\, (p \to p)$ قوی‌تر از دیگر تعریف‌ها و معادل t است.

۶. هم‌چنین، از آنجا که یک تناقض نمی‌تواند همه تناقض‌ها را نتیجه دهد، بنابراین، تعریف F به $\exists p\, (p \wedge \sim p)$ نمی‌تواند معادل با تعریف به $\forall p\, (p \wedge \sim p)$ باشد. از آنجا که تعریف دوم تعریف درست F است بنابراین تعریف اول، یعنی $\exists p\, (p \wedge \sim p)$ ، تعریف F نمی‌تواند باشد. از سوی دیگر، این تعریف نمی‌تواند تعریف f باشد زیرا f ضعیف‌تر از هر تناقضی است و نمی‌تواند وجود حداقل یک تناقض را نتیجه دهد.

۷. در نمودار زیر، تعریف‌های نادرست را با خط زدن و تعریف‌های اصلاح شده را با سیاه و ایتالیک کردن نشان داده‌ایم:

$\boldsymbol{A \circ B}$	$\boldsymbol{\forall p\{ [A \to (B \to p)] \to p \}}$		
$A \wedge B$	$\sim (A \to \sim B)$ $[A \to (B \to \boldsymbol{f})] \to \boldsymbol{f}$ $\sim (\sim A \vee \sim B)$ $[(A \to \boldsymbol{f}) \vee (B \to \boldsymbol{f})] \to \boldsymbol{f}$ $\cancel{\forall p\{ [(A \to p) \vee (B \to p)] \to p \}}$	$A \vee B$	$\sim A \to B$ $(A \to \boldsymbol{f}) \to B$ $\sim (\sim A \wedge \sim B)$ $[(A \to \boldsymbol{f}) \wedge (B \to \boldsymbol{f})] \to \boldsymbol{f}$ $\forall p\{ [(A \to p) \wedge (B \to p)] \to p \}$
$\forall x\, Fx$	$\sim \exists x \sim \boldsymbol{F}x$ $\exists x\, (\boldsymbol{F}x \to \boldsymbol{f}) \to \boldsymbol{f}$ $\cancel{\forall p\, [\exists x\, (\boldsymbol{F}x \to p) \to p]}$	$\exists x\, \boldsymbol{F}x$	$\sim \forall x \sim \boldsymbol{F}x$ $\forall x\, (\boldsymbol{F}x \to \boldsymbol{f}) \to \boldsymbol{f}$ $\forall p\, [\forall x\, (\boldsymbol{F}x \to p) \to p]$
F	$\sim T$ $T \to \forall p\, p$ $\exists p\, p \to \forall p\, p$ $\forall p \sim (p \to p)$ $\cancel{\exists p\, (p \wedge \sim p)}$ $\forall p\, (p \wedge \sim p)$ $\forall p\, p$	T	$\sim F$ $F \to \forall p\, p$ $\forall p\, p \to \forall p\, p$ $\exists p\, (p \to p)$ $\exists p\, (p \vee \sim p)$ $\cancel{\forall p\, (p \vee \sim p)}$ $\exists p\, p$
$\boldsymbol{f}$	$\boldsymbol{\exists p \sim (p \to p)}$ $\boldsymbol{\exists p\, \{p \circ \forall q\, [(q \to p) \to p] \to q\}}$	$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{\forall p\, (p \to p)}$
$\boldsymbol{\neg A}$	$\boldsymbol{A \to F}$		
$\boldsymbol{\sim A}$	$\boldsymbol{A \to f}$ $\boldsymbol{A \to \exists p\, \{p \circ \forall q\, [(q \to p) \to p] \to q\}}$		

برهان هم‌ارزی T با $\exists p\, (p \to p)$ شاید دشوار باشد اما با توجه به قضیه $T \to (T \to T)$ که برهان آن را قبلا آوردیم این هم‌ارزی را به آسانی می‌توان اثبات کرد.

تمرین:

۱. اگر سور گزاره‌ای $\forall$ و ادات شرطی ربطی $\to$ و ادات تابع ارزشی $\wedge$ را تعریف‌ناشده بگیریم سایر ادات‌ها را به گونه‌ای تعریف کنید که دچار تعریف‌های دوری نشوید.

۲. آیا در تمرین قبل، می‌توان به جای سور کلی از سور جزیی استفاده کرد؟ چگونه؟

۳. آیا در تمرین ۱، می‌توان به جای ترکیب عطفی از ترکیب فصلی استفاده کرد؟ چگونه؟

۴. اگر ناقض را تعریف ناشده در نظر بگیریم چگونه می‌توان، به کمک سور گزاره‌ای $\forall$ و ادات شرطی ربطی $\to$ ، سایر ادات‌ها را تعریف کرد؟

سورهای معنایی

۱-۳-۱) انواع سور

سورهای فردی که در منطق کلاسیک و منطق ربط، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است در تناظر با ترکیب عطفی و ترکیب فصلی هستند و در صورت محدود بودن مصادیق، این سورها را، به صورت زیر، می‌توانیم به کمک عاطف و فاصل تعریف کنیم:

سور عمومی	$Fa \wedge Fb \wedge Fc \wedge \ldots$	تع=	$\forall xFx$
سور وجودی	$Fa \vee Fb \vee Fc \vee \ldots$	تع=	$\exists xFx$

قواعد و قوانین اصلی و فرعی سورها به قواعد و قوانین عاطف و فاصل شباهت بسیار دارد:

$\sim(\sim P \wedge \sim Q)$	تع=	$(P \wedge Q)$	$\sim\exists x\sim Fx$	تع=	$\forall xFx$
$\sim(\sim P \vee \sim Q)$	تع=	$(P \vee Q)$	$\sim\forall x\sim Fx$	تع=	$\exists xFx$

به دو گونه است: سور مصداقی و استغراقی و سور معنایی و ربطی. اگر سور مصداقی را با همان نمادهای آشنای $\forall$ و $\exists$ نشان دهیم و سور ربطی را با $\forall^{\circ}$ و $\exists^{+}$ نمایش دهیم می‌توانیم،

عموم مجموعی	سور کلی	$Fa \circ Fb \circ Fc \circ \ldots$	تع=	$\forall^{\circ}xFx$
عموم بدلی	سور جزیی	$Fa + Fb + Fc + \ldots$	تع=	$\exists^{+}xFx$

سورهای عمومی و وجودی و نیز سورهای کلی و جزیی را می‌توان به شیوه معمول، بر حسب یک دیگر تعریف کرد:

$\forall^{\circ}xFx$ تع= $\sim\exists^{+}x\sim Fx$

$\exists^{+}xFx$ تع= $\sim\forall^{\circ}x\sim Fx$

به همین دلیل، بیان اصول موضوعه و قواعد استنتاجی برای سورهای عمومی و کلی کفایت می‌کند.

۱-۳-۲) سورهای مصداقی

برای سور عمومی، همان قواعد و اصول معروف کفایت می‌کند:

حذف $\forall$		$\forall xA \rightarrow A(a/x)$	1
معرفی $\forall$	مشروط به این‌که A فاقد x آزاد باشد	$\forall x(A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow\forall xB)$	2
معرفی مادی $\forall$	مشروط به این‌که A فاقد x آزاد باشد	$\forall x(A\supset B)\rightarrow(A\supset\forall xB)$	3
Confinement	مشروط به این‌که A فاقد x آزاد باشد	$\forall x(A\vee B)\rightarrow(A\vee\forall xB)$	3
قاعده تعمیم		$\dfrac{\vdash A(a/x)}{\vdash \forall xA}$	4

توجه کنید که یکی از دو صورت اصل موضوع سوم کافی است و ما هر دو را نوشته‌ایم زیرا شکل اول آن، شباهت و تفاوت آن را با اصل دوم به خوبی نشان می‌دهد. شکل دوم هم این امتیاز را دارد که شباهت آن را با اصل توزیع‌پذیری عاطف بر فاصل نشان می‌دهد. اتفاقا، دلیل افزودن این اصل همان دلیل افزودن قوانین توزیع‌پذیری به اصول منطق گزاره‌های ربطی است.

شباهت حذف و معرفی $\forall$ به حذف و معرفی ضعیف $\wedge$ مثال زدنی است:

$$(Fx \wedge Fb) \rightarrow Fa$$
$$((A \rightarrow Fa) \wedge (A \rightarrow Fb)) \rightarrow (A \rightarrow (Fa \wedge Fb))$$

هم‌چنین، شباهت قاعده تعمیم به قاعده پیوند:

$$\vdash Fa$$
$$\vdash Fb$$
$$\overline{\vdash Fa \wedge Fb}$$

۱-۳-۳)

سورهای معنایی را در کتاب‌های منطق ربط عنوان نکرده‌اند و طرح آن از مختصات این کتاب است. با این حال، مؤلف تاکنون به هیچ قاعده یا اصل موضوعی که بتواند همه احکام این سورها را بیان کند دست نیافته است و طراحی یک نظام استنتاجی صحیح و تمام برای این سورها مسأله‌ای باز است. با این وجود، می‌توان گزاره‌های زیر را از احکام آن دانست:

$$\nvdash \forall^{\circ}x\, Fx \rightarrow Fa$$
$$\nvdash Fa \rightarrow \exists^{+}xFx$$
$$\nvdash \forall^{\circ}x\, Fx \rightarrow \exists^{+}xFx$$
$$\vdash \forall xFx \rightarrow \forall^{\circ}xFx$$
$$\vdash \exists^{+}xFx \rightarrow \exists xFx$$
$$\vdash \forall^{\circ}x\forall^{\circ}yFxy \rightarrow \forall^{\circ}y\forall^{\circ}xFxy$$
$$\vdash \exists^{+}x\exists^{+}yFxy \rightarrow \exists^{+}y\exists^{+}xFxy$$
$$\nvdash \exists^{+}x\forall^{\circ}yFxy \rightarrow \forall^{\circ}y\exists^{+}xFxy$$

۱-۳-۴) تمرین

۱- تعیین کنید که سورها در جملات زیر ربطی است یا مادی یا هردو؟

اگر کسی همه حیوانات را دوست بدارد همه پرندگان را دوست دارد.
اگر قرعه بیندازند نام یک نفر بیرون خواهد آمد؛ پس کسی هست که اگر قرعه بیندازند نامش بیرون می‌آید.
اگر همه وارد اتاق شوند اتاق پر می‌شود؛ پس کسی هست که اگر وارد اتاق شود اتاق پر می‌شود.

۲- برای سورهای غیر ربطی و شرطی‌های ربطی، استدلال‌ها و اصول زیر را اثبات کنید:

$$\begin{array}{c}\forall x(Fx \to P)\\ \hline\hline \exists xFx \to P\end{array} \qquad \begin{array}{c}\forall x(P \to Fx)\\ \hline\hline P \to \forall xFx\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\exists x(Fx \to P)\\ \hline \forall xFx \to P\end{array} \qquad \begin{array}{c}\exists x(P \to Fx)\\ \hline P \to \exists xFx\end{array}$$

$$\begin{array}{c}\forall x(Fx + P)\\ \hline\hline \forall xFx + P\end{array} \qquad \begin{array}{c}\exists x(P + Fx)\\ \hline P + \exists xFx\end{array}$$

$$\begin{array}{c}P \circ \exists xFx\\ \hline\hline \exists x(P \circ Fx)\end{array} \qquad \begin{array}{c}P \circ \forall xFx\\ \hline \forall x(P \circ Fx)\end{array}$$

$\vdash \forall x\, Fx \to Fa$

$\vdash Fa \to \exists xFx$

$\vdash \forall x\, Fx \to \exists xFx$

$\vdash \forall xFx \to \forall yFy$

$\vdash \exists xFx \to \exists yFy$

$\vdash \forall x\forall yFxy \to \forall y\forall xFxy$

$\vdash \exists x\exists yFxy \to \exists y\exists xFxy$

$\vdash \exists x\forall yFxy \to \forall y\exists xFxy$

هر کس که این دکمه را فشار دهد بمب منفجر خواهد شد
══════════════
اگر کسی این دکمه را فشار دهد بمب منفجر می‌شود

هر کسی در صورت برگزاری جشن خوش‌حال می‌شود
══════════════
اگر جشن برگزار شود همه خوش‌حال می‌شوند

برخی از افراد اگر نامزد ریاست جمهوری شوند مردم تعجب می‌کنند
──────────────
اگر همه مردم نامزد ریاست جمهوری شوند مردم تعجب می‌کنند

برخی افراد، در صورت بروز حوادث غیر مترقبه، وحشت زده می‌شوند
──────────────
در صورت بروز حوادث غیر مترقبه، برخی افراد وحشت زده می‌شوند

هر مجرمی یا کیفر می‌شود یا مجریان قانون بی‌عدالتی می‌کنند
══════════════
یا همه مجرمان کیفر می‌شوند یا مجریان قانون بی‌عدالتی می‌کنند

کسانی هستند که یا به زندان می‌افتند یا جامعه به خطر می‌افتد
──────────────
یا کسانی به زندان می‌افتند یا جامعه به خطر می‌افتد

گران شدن قیمت‌ها با ثروتمند شدن برخی از افراد سازگار است
══════════════
برخی از افراد هستند که گران شدن قیمت‌ها با ثروتمند شدن آن‌ها سازگار است

کاهش منابع طبیعی با افزایش قیمت همه کالاها سازگار است
──────────────
کاهش منابع طبیعی با افزایش قیمت هر یک از کالاها سازگار است

۳- استدلال‌ها و گزاره‌های زیر را به زبان نمادین ترجمه کنید و اثبات یا عدم اثبات آن‌ها را بررسی نمایید:

کسی هست که در هر مسابقه برنده می‌شود
──────────────
در هر مسابقه کسی برنده می‌شود

کسی هست که اگر مسابقه برگزار شود برنده می‌شود
──────────────
اگر مسابقه برگزار شود کسی برنده می‌شود

هر کس که از همه قوی‌تر است از او قوی‌تر هم وجود دارد

هر کس که همه را دوست دارد کسی نیز او را دوست دارد

۴- اصول و قواعد زیر را در منطق کلاسیک (برای سورها و شرطی‌های مادی) اثبات کنید و نشان دهید که این اصول و قواعد در منطق ربط (برای سورهای مادی و شرطی‌های ربطی) درست نیستند:

$\nvdash (P \rightarrow \exists xFx) \rightarrow \exists x(P \rightarrow Fx)$

$\nvdash (\forall xFx \rightarrow P) \rightarrow \exists x(P \rightarrow Fx)$

$$\frac{(P \rightarrow \exists xFx)}{\exists x(P \rightarrow Fx)}$$

$$\frac{(\forall xFx \rightarrow P)}{\exists x(P \rightarrow Fx)}$$

$\nvdash \exists x\forall y(\forall zFyz \rightarrow Fxy)$

$$\frac{\forall x\exists y(Fx \leftrightarrow Gy)}{\exists y_1\exists y_2\forall x[(Fx \rightarrow Gy_1) \wedge (Gy_2 \rightarrow Fx)]}$$

$$\frac{\forall x\exists y(Fx \rightarrow Gy)}{\exists y\forall x\, (Fx \rightarrow Gy)}$$

۵- با توجه به تناظر سورهای کلی و جزیی (معنایی) با تلفیق و تفریق، گزاره‌هایی را که در پایان این بخش برای آن دو سور آوردیم تبیین کنید.

۶- آیا می‌توانید اصول موضوعه‌ای برای سورهای معنایی بیابید که بتوانند معنای کامل آن‌ها را بیان کنند.

تنوع محدودیت‌ها به دلیل تنوع نظام‌های منطق کلاسیک

نظام‌های استنتاج طبیعی برای منطق کلاسیک بسیار متنوع است و در نتیجه، محدودیت‌هایی که باید بر این نظام‌ها اعمال شود تا به منطق ربط برسیم متنوع خواهد بود. در نظام‌های استنتاج طبیعی برهانک محور، مانند آنچه در بخش‌های قبل معرفی شد، مهم‌ترین ایراد مربوط می‌شود به اینکه سطر آخر بسیاری از برهانک‌ها بر فرض آن برهانک استوار نیست و بنابراین، ناچاریم چنین برهانک‌ها را غیر ربطی به شمار بیاوریم. این در حالی است که در نظام‌های استنتاج طبیعی که بر شماره‌فرض‌ها تأکید دارند، این ایراد، اساسا، وارد نیست. در این نظام‌ها، قواعد متناظر با قواعد نیازمند به برهانک (در نظام برهانک محور) به نحوی بیان می‌شوند که نیاز به وجود فرض در آنها تصریح می‌شود. برای مثال، قواعد کلاسیک زیر را در بگیرید:

	$\to$	$\sim$	$\wedge$	$\vee$
معرفی	$S, A \vdash B$ ――― $S \vdash A \to B$	$S, A \vdash B \wedge \sim B$ ――― $S \vdash \sim A$	$S \vdash A$ $S' \vdash B$ ――― $S, S' \vdash A \wedge B$	$S \vdash A$ ――― $S \vdash A \vee B$ $S \vdash B \vee A$
حذف	$S \vdash A \to B$ $S' \vdash A$ ――― $S, S' \vdash B$	$S \vdash \sim\sim A$ ――― $S \vdash A$	$S \vdash A \wedge B$ ――― $S \vdash A$ $S \vdash B$	$S'' \vdash A \vee B$ $S, A \vdash C$ $S', B \vdash C$ ――― $S, S', S'' \vdash C$

در این قواعد، هر یک از S ها مجموعه‌ای تهی، یک یا چند عضوی از فرمول‌ها است اما A، B و C هر کدام یک فرمول هستند. در قواعد معرفی شرطی و قاعده معرفی ناقض، فرمول A فرض کمکی است و در حذف فاصل، فرمول‌های A و B فرض کمکی هستند. (این سه قاعده متناظر با قواعد نیازمند به برهانک هستند.) وجود فرض A یا B در مقدمه این سه قاعده، نشانگر این است که استفاده از این فرض‌ها، برای استنتاج نتیجه، ضروری شمرده شده است. در این نظام، دیگر لازم نیست شرط کنیم که سطر آخر برهانک باید بر فرض برهانک استوار باشد زیرا این شرط، خود به خود، در بیان قواعد مراعات شده است.

ایراد اساسی که از دیدگاه منطق ربط، به این نظام وارد است (علاوه بر یکسان نبودن فرض‌ها در معرفی $\wedge$ و حذف $\vee$،) این است که در این قواعد سه گانه، فرض‌ها ممکن است حذف نشوند. برای مثال، در قاعده معرفی شرطی، ممکن است فرض A در مجموعه S حضور داشته باشد و این فرض در نتیجه قاعده نیز تکرار شود. برای نمونه، به این برهان توجه کنید:

در این نظام، به دلیل فقدان شرط حذف فرض‌های کمکی، ممکن است فرض A از نتیجه حذف نشود و این به پارادوکس Mingle منجر می‌شود:

1	1	A	فرض
1, 1	2	A	مساوی بودن مجموعه {1} با مجموعه {1,1} یا با مجموعه {1} ∪ {1}
1	3	$A \to A$	معرفی شرطی (۱و۲)
	4	$A \to (A \to A)$	معرفی شرطی (۱و۳)

سطر دوم در واقع تکرار سطر اول است. در این سطر دوم، می‌توان 1 سمت چپ را به عنوان S در نظر گرفت و 1 سمت راست را به منزله A تلقی کرد. در این صورت، سطر سوم با معرفی شرطی از سطر دوم به دست می‌آید ولی می‌بینیم که فرض A که با شماره 1 نشان داده شده از مجموعه مقدمات حذف نشده است زیرا در بیان قاعده معرفی شرطی، S، بدون هیچ تغییری، در نتیجه ذکر می‌شود.

برای انتقال از این نظام به منطق ربط، باید حذف فرض کمکی هنگام معرفی شرطی و مانند آن الزامی شود تا نتایجی از قبیل فرمول فوق حاصل نشود. پارادوکسی بودن فرمول فوق به این دلیل است که $A \rightarrow A$ قانونی منطقی است و بی‌نیاز از هر فرضی حتی خود A . بنابراین $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ که $A \rightarrow A$ را مبتنی بر A می‌سازد در منطق ربط پذیرفته نیست. با مشروط کردن قاعده معرفی شرطی، $A \rightarrow (A \rightarrow A)$ غیر قابل اثبات می‌شود و به منطق ربطی R نزدیک می‌شویم. (به جای شرط فوق می‌توانستیم قاعده تساوی مجموعه {1} با مجموعه {1, 1} یا با مجموعه $\{1\} \cup \{1\}$ را کنار بگذاریم چنان که برخی از منطق‌دان‌ها چنین کرده‌اند. در این صورت، تکرار در مجموعه اهمیت می‌یابد و ما دیگر اجازه نخواهیم داشت به دلخواه، اعضای مجموعه را تکرار کنیم. چنین مجموعه‌های حساس به تکرار را «مجموعه مکرر» می‌نامند. اگر علاوه بر تکرار، جابجایی اعضای مجموعه را نیز ممنوع بدانیم به مفهوم «دنباله» خواهیم رسید. حسن این رهیافت در این است که با معرفی نظام‌های ضعیف‌تر در منطق ربط سازگار است. اما این به قیمت از دست دادن سادگی تمام می‌شود: در این رهیافت، به جای مجموعه مقدمات، از دنباله مقدمات استفاده می‌کنند. از آن‌جا که بحث از نظام‌های ضعیف‌تر را به فصل‌های بعد سپرده‌ایم، می‌توانیم در این‌جا سادگی نظام را حفظ کنیم و صرفا قواعد مربوط به عملگرها را تغییر دهیم.)

برای رسیدن به منطق ربط، سه تغییر در قواعد بالا لازم است:

۱- در قواعد معرفی عاطف و حذف فاصل، مجموعه‌های S و S′ باید یکسان باشند.
۲- قواعد توزیع پذیری باید به عنوان قواعد اصلی افزوده شود.
۳- فرض‌های کمکی باید از نتیجه حذف شوند:
 a. در قواعد معرفی شرطی و معرفی ناقض، مجموعه مقدمات در نتیجه نباید شامل A باشد.
 b. در قاعده حذف فاصل، مجموعه مقدمات در نتیجه نباید شامل A یا B باشد.
۴- در قاعده معرفی ناقض، باید امکان اختلاف مفروضات B و ~B وجود داشته باشد. (این شرط را بعدا توضیح می‌دهیم.)

در برخی از نظام‌های استنتاج طبیعی برای منطق کلاسیک، هر دو شرط «کاربرد فرض کمکی» و «حذف فرض کمکی» وجود دارد و تنها ایراد آنها یکسان نبودن فرض‌ها در معرفی $\wedge$ و حذف $\vee$ است و بنابراین، برای ربطی کردن این نظام‌ها، کافی است این شرط یکسانی به همراه قواعد پخش‌پذیری به آنها افزوده شود. یکی از این نظام‌ها نظام لمون است که موحد ۱۳۶۸ آن را به کار برده است. اگر قواعد این نظام را به صورت دقیق و کوتاه بخواهیم بیان کنیم به صورت زیر در خواهد آمد:

	→	~	∧	∨
معرفی	$S, A \vdash B$ ――――― $S - \boldsymbol{\{A\}} \vdash A \rightarrow B$	$S , A \vdash B \wedge \sim B$ ――――― $S - \boldsymbol{\{A\}} \vdash \sim A$	$S \vdash A$ $S' \vdash B$ ――――― $S, S' \vdash A \wedge B$	$S \vdash A$ ――――― $S \vdash A \vee B$ $S \vdash B \vee A$
حذف	$S \vdash A \rightarrow B$ $S' \vdash A$ ――――― $S , S' \vdash B$	$S \vdash \sim\sim A$ ――――― $S \vdash A$	$S \vdash A \wedge B$ ――――― $S \vdash A$ $S \vdash B$	$S'' \vdash A \vee B$ $S , A \vdash C$ $S' , B \vdash C$ ――――― $S, S', S'' - \boldsymbol{\{A , B\}} \vdash C$

برای بررسی مطابقت این قواعد با قواعد لمون، به بیان همین قواعد در موحد ۱۳۶۸ مراجعه کنید. تنها موارد اختلاف این نظام با نظام بالا را ایتالیک و سیاه کردن بخش‌های افزوده شده نشان داده‌ایم. برای ربطی ساختن این نظام، کافی است دو قاعده زیر را اعمال کنیم:

۱- در قواعد معرفی عاطف و حذف فاصل، مجموعه‌های S و S' باید یکسان باشند.
۲- قواعد توزیع پذیری باید به عنوان قواعد اصلی افزوده شود.
۳- در قاعده معرفی ناقض، باید امکان اختلاف مفروضات B و $\sim B$ وجود داشته باشد. (این شرط را بعدا توضیح می‌دهیم.)

با اعمال تغییرات فوق به نظام ربطی R می‌رسیم با قواعد استنتاجی زیر:

قواعد منطق ربط

	→	~	∧	∨	توزیع‌پذیری[78]
معرفی	$S, A \vdash B$ ――――― $S - \{A\} \vdash A \rightarrow B$	$A \in S \cup S'$ $S \vdash B$ $S' \vdash \sim B$ ――――― $S , S' - \{A\} \vdash \sim A$	$S \vdash A$ $S \vdash B$ ――――― $S \vdash A \wedge B$	$S \vdash A$ ――――― $S \vdash A \vee B$ $S \vdash B \vee A$	$A \wedge (B \vee C)$ ═════ $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
حذف	$S \vdash A \rightarrow B$ $S' \vdash A$ ――――― $S , S' \vdash B$	$S \vdash \sim\sim A$ ――――― $S \vdash A$	$S \vdash A \wedge B$ ――――― $S \vdash A$ $S \vdash B$	$S' \vdash A \vee B$ $S , A \vdash C$ $S , B \vdash C$ ――――― $S , S' - \{A , B\} \vdash C$	$A \vee (B \wedge C)$ ═════ $(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

توضیحی درباره شرط ۳: به دلیل محدودیت حاصل برای معرفی عاطف، مجبوریم مانند گذشته، این محدودیت را برای رسیدن به تناقض در برهانک خلف کنار بگذاریم. در این نظام لمون، که از برهانک خبری نیست، شاید بهتر باشد گزینه دیگری را بررسی کنیم: در این روش، نماد عاطف را از قاعده حذف عاطف برداریم و صورت جدیدی به برهان خلف می‌دهیم. اگر محدودیت پیش‌گفته باقی بماند و نماد عاطف را از قاعده برهان خلف برنداریم بسیاری از قواعد

مقبول نقض قابل اثبات نخواهند بود. برای نمونه، برهان عکس نقیض را از منطق کلاسیک می‌آوریم و نشان می‌دهیم که لازم است تغییر فوق را اعمال کنیم:

1	1	$A \to B$	فرض
2	2	$\sim B$	فرض
3	3	A	فرض
1, 3	4	B	حذف شرطی (۱و۳)
1, 2, 3	5	$B \wedge \sim B$	معرفی عاطف (۲و۴)
1, 2	6	$\sim A$	حذف ناقض (۲و۳و۵)

چنان که می‌بینیم، معرفی عاطف در سطر پنج از سطرهای دو و چهار به دست آمده است اما مفروضات این دو سطر یکسان نیست و لذا در منطق ربط نمی‌توان به سطر پنج رسید. اما با تغییری که در قاعده حذف ناقض به وجود آمد، می‌توانیم سطر پنج را حذف کرده، مستقیما به سطر شش برسیم.

توجه کنید که قاعده معرفی ناقض، در این نظام، به طور عام نوشته شده و سه صورت دارد که ذیلا ذکر می‌کنیم:

$$\frac{S, A \vdash B \qquad S' \vdash \sim B}{S, S' \vdash \sim A} \qquad \frac{S \vdash B \qquad S', A \vdash \sim B}{S, S' \vdash \sim A} \qquad \frac{S, A \vdash B \qquad S', A \vdash \sim B}{S, S' \vdash \sim A}$$

از آن‌جا که هر سه شکل فوق کاربرد دارد صورت کلی آن را در مجموعه قواعد ذکر کردیم. از سوی دیگر، هر یک از قوانین توزیع پذیری بقیه را نتیجه می‌دهند و تنها به یکی نیاز هست اما ما برای تسهیل در صورت‌برهان‌ها همه صور آن را با هم آورده‌ایم.

با شرط این‌همانی، $S = S'$ ، بسیاری از اصول غیر ربطی منطق کلاسیک غیر قابل اثبات خواهند شد. برای نمونه، برهان پارادوکس مثبت در منطق کلاسیک را ببینید:

1	1	A	فرض
2	2	B	فرض
1, 2	3	$A \wedge B$	معرفی عاطف (۱و۲)
1, 2	4	A	حذف عاطف (۳)
1	5	$B \to A$	دلیل شرطی (۲و۴)
	6	$A \to (B \to A)$	دلیل شرطی (۱و۵)

چنان‌که می‌بینیم معرفی عاطف در سطر(۳) از سطرهای (۱) و(۲) به دست آمده است و فرض‌های این دو سطر یکسان نیستند یعنی $S \neq S'$ به همین دلیل به پارادوکس مثبت منجر شده‌اند.