استدلال

استدلال مجموعه‌ای از مقدمات و نتایج است. استدلال گاهی یک طرفه است و گاهی دو طرفه. استدلال یک طرفه مانند عکس مستوی موجب کلی که در آن، «هر الف ب است» نتیجه می‌دهد «بعضی ب الف است» ولی عکس آن درست نیست. استدلال دوطرفه مانند عکس مستوی سالب کلی که در آن «هیچ الف ب نیست» نتیجه می‌دهد «هیچ ب الف نیست» و برعکس.

از این به بعد، مقدما را بالا و نتایج را زیر آن می‌نویسیم و برای جدا کردن مقدمات از نتایج، در استدلال‌های یک طرفه، یک خط افقی و در استدلال‌های دو طرفه، دو خط افقی رسم می‌کنیم. برای نمونه:

هر الف ب است	بعضی الف ب است	هیچ الف ب نیست
―――――	═════	═════
بعضی ب الف است	بعضی ب الف است	هیچ ب الف نیست

گاهی نیز دو استدلال را که در بخشی مشترک هستند، برای اختصار، با هم می‌نویسیم. برای نمونه، عکس مستوی در موجب‌ها را با هم به صورت زیر ترکیب می‌کنیم:

هر الف ب است
―――――
بعضی ب الف است
═════
بعضی الف ب است

استدلال صحیح استدلالی است که مقدماتش، صادق و علاوه بر آن، مستلزم نتیجه باشند. این دو شرط (صدق مقدمات و استلزام نتیجه) به ما اطمینان می‌دهند که نتیجه صادق است. اثبات شرط اول یعنی صدق مقدمات برعهده علوم و فنونی است که به بحث درباره آن مقدمات می‌پردازند؛ اما اثبات شرط دوم یعنی استلزام از مقدمات به نتایج برعهده علم منطق است.

اگر مقدمات مستلزم نتایج باشند استدلال را «معتبر» و در غیر این صورت، «نامعتبر» می‌نامیم. در استدلال معتبر، هرگاه همه مقدمات صادق باشند همه نتایج نیز صادق خواهند بود؛ به عبارت دیگر، استدلال معتبر آن است که هرگز نمی‌شود که همه مقدماتش صادق و برخی نتایجش کاذب باشد.

برای اثبات اعتبار و عدم اعتبار استدلال‌ها، راه‌های بسیاری وجود دارد. اولین راه ترسیم جدول ارزش مقدمات و نتایج است. در این روش، سطری از جدول را جستجو می‌کنیم که در آن، همه مقدمات صادق و برخی نتایج کاذب باشند. اگر چنین سطری یافته شد استدلال نامعتبر و گرنه معتبر خواهد بود.

برای نمونه، قیاس استثنایی «وضع مقدم» و مغالطه «رفع تالی» را در نظر بگیرید:

وضع مقدم:

$P \to Q$
P
———
Q

وضع تالی:

$P \to Q$
Q
———
P

P	→	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
مقدمه	مقدمه	نتیجه

P	→	Q
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
نتیجه	مقدمه	مقدمه

همان طور که می‌بینیم، در استدلال سمت راست، هیچ سطری یافت نمی‌شود که مقدمات آن صادق و نتیجه‌اش کاذب باشد پس این استدلال معتبر است ولی در استدلال سمت چپ، می‌بینیم که در سطر سوم، همه مقدمات صادق ولی نتیجه کاذب است، از این رو، استدلال نامعتبر است.

از آنجا که روش جدول ارزش گاهی بسیار طولانی و خسته کننده است،[۱] منطق‌دانان روش‌های دیگری را ابداع کرده‌اند که بسیار سریع‌تر است. سریع‌ترین این روش‌ها روش ارزش‌دهی است که هم اینک به آن می‌پردازیم.

روش ارزش‌دهی

مبنای این روش، برهان خلف است یعنی فرض می‌کنیم استدلال نامعتبر است یعنی می‌شود که همه مقدمات صادق باشند اما همه نتایج صادق نباشند. برای این کار، نتایج را باید جداگانه مورد بررسی قرار دهیم. به همین منظور، یکی از نتایج را با همه مقدمات در نظر می‌گیریم. همه مقدمات را صادق و نتیجه مورد نظر را کاذب می‌گیریم. صدق و کذب مقدمات را با نوشتن نمادهای ۱ و ۰ نشان می‌دهیم و قواعد ارزش‌دهی را به کار می‌بریم:

قواعد ارزش‌دهی:

۱. هرگاه ارزش دو جزء فرمول را داشته باشیم ارزش کل فرمول به دست می‌آید؛
۲. گاهی، با داشتن ارزش کل فرمول، ارزش دو جزء فرمول به دست می‌آید؛
۳. گاهی، با داشتن ارزش یک جزء فرمول، ارزش کل فرمول به دست می‌آید؛
۴. گاهی، با داشتن ارزش یک جزء فرمول و ارزش کل فرمول، ارزش جزء دیگر به دست می‌آید؛
۵. اگر فرمولی در یک استدلال چند بار به کار رفته بود (به اصطلاح، چند مورد داشت) و ارزش یک مورد به دست آمد موارد دیگر هم آن ارزش را خواهند داشت.

چهار قاعده اول را به آسانی از جدول‌های ارزش ادات‌ها می‌توان به دست آورد.[۲]

---

[1] برای نمونه، اگر پنج حرف گزاره‌ای در استدلال باشد جدول ارزش آن سی و دو سطر باید داشته باشد.

[2] قاعده‌های ۲ تا ۳ را در جدول‌های زیر به اختصار می‌آوریم:

قاعده ۲: ارزش کل فرمول $\Leftarrow$ ارزش دو جزء فرمول

صدق فرمول عطفی$\Leftarrow$ ارزش دو جزء فرمول

کذب فرمول شرطی و فصلی ⇐ ارزش دو جزء فرمول

	~P	P∧Q	P↓Q	P>Q	P<Q
عطفی‌ها:	~P 1 ——— P 0	P∧Q 1 ——— P Q 1 1	P↓Q 1 ——— P Q 0 0	P>Q 1 ——— P Q 1 0	P<Q 1 ——— PQ 0 1
شرطی‌ها و فصلی‌ها:	~P 0 ——— P 1	P∨Q 0 ——— P Q 0 0	P↑Q 0 ——— P Q 1 1	P→Q 0 ——— PQ 1 0	P←Q 0 ——— P Q 0 1

قاعده ۳: ارزش یک جزء فرمول ⇐ ارزش کل فرمول

ارزش یک جزء فرمول ⇐ صدق فرمول‌های شرطی و فصلی

ارزش یک جزء فرمول ⇐ کذب فرمول‌های عطفی

	فصلی‌ها:		شرطی‌ها:				عطفی‌ها:	
P 1 ——— ~P 0	P 1 ——— P∨Q 1	Q 1 ——— P∨Q 1	P 1 ——— P←Q 1	Q 1 ——— P→Q 1	P 1 ——— P↓Q 0	Q 1 ——— P↓Q 0	P 1 ——— P<Q 0	Q 1 ——— P>Q 0
P 0 ——— ~P 1	P 0 ——— P↑Q 1	Q 0 ——— P↑Q 1	P 0 ——— P→Q 1	Q 0 ——— P←Q 1	P 0 ——— P∧Q 0	Q 0 ——— P∧Q 0	P 0 ——— P>Q 0	Q 0 ——— P<Q 0

قاعده ۴: ارزش یک جزء فرمول و ارزش کل فرمول ⇐ ارزش جزء دیگر

ارزش یک جزء فرمول و کذب فرمول عطفی ⇐ ارزش جزء دیگر

ارزش یک جزء فرمول و صدق فرمول شرطی یا فصلی ⇐ ارزش جزء دیگر

عطفی‌ها	P∧Q 10 ——— Q 0	P∧Q 01 ——— P 0	P↓Q 00 ——— Q 0	P↓Q 00 ——— P 0	P>Q 10 ——— Q 1	P>Q 00 ——— P 0	P<Q 00 ——— Q 0	P<Q 01 ——— P 1	عطفی‌ها:
فصلی‌ها	P↑Q 11 ——— Q 0	P↑Q 11 ——— P 0	P∨Q 0 1 ——— Q 0	P∨Q 1 0 ——— P 0	P→Q 1 1 ——— Q 1	P→Q 1 0 ——— P 0	P←Q 0 1 ——— P 0	P←Q 1 1 ——— P 1	شرطی‌ها:
دوفصلی	P↕Q 0 0 ——— Q 0	P↕Q 0 0 ——— P 0	P↕Q 1 0 ——— Q 1	P↕Q 0 1 ——— P 1	P↔Q 0 0 ——— Q 1	P↔Q 0 0 ——— P 1	P↔Q 1 0 ——— Q 0	P↔Q 0 1 ——— P 0	دوشرطی:
	P↕Q 1 1 ——— Q 0	P↕Q 1 1 ——— P 0	P↕Q 0 1 ——— Q 1	P↕Q 1 0 ——— P 1	P↔Q 1 1 ——— Q 1	P↔Q 1 1 ——— P 1	P↔Q 0 1 ——— Q 0	P↔Q 1 0 ——— P 0	

بدیهی است که حفظ کردن قواعد فوق آسان نیست و خوش‌بختانه، نیازی به این کار نیز وجود ندارد. مهم درک این قواعد از روی جدول ارزش و به دست آوردن آنها هنگام نیاز است.

با داشتن قواعد فوق می‌توان برهان خلف را به کار برد:

برهان خلف:

۱. فرض می‌کنیم استدلال نامعتبر است یعنی مقدمات را صادق و نتیجه را کاذب می‌گیریم؛
۲. قواعد ارزش‌دهی را تا آنجا به کار می‌بریم که یا به تناقض برسیم یا همه فرمول‌ها ارزش‌دهی شوند؛
۳. اگر به تناقض برسیم معنایش این است که فرض ما نادرست بوده و استدلال معتبر است؛
۴. اگر همه فرمول‌ها، بدون تناقض، ارزش‌دهی شوند استدلال نامعتبر است؛
۵. اگر همه فرمول‌ها ارزش‌دهی شوند همه حروف گزاره‌ای نیز ارزش‌دهی شده‌اند. مجموعه این حروف به همراه ارزش‌هایشان را «مثال نقض» یا «الگوی نقض» می‌نامند. استدلال معتبر مثال نقض ندارد ولی استدلال نامعتبر، دست کم، یک مثال نقض دارد.

مثال نقض، در حقیقت، سطری از جدول ارزش را نشان می‌دهد که در آن، همه مقدماتِ استدلال صادق و نتیجه آن کاذب است. یافتن مثال نقض برای یک استدلال نشان می‌دهد که گاهی مقدمات آن صادق اما نتیجه‌اش کاذب است و این معادل نامعتبر بودن استدلال است.

به عنوان یک نمونه، روش ارزش‌دهی را برای قیاس وضع مقدم و مغالطه وضع تالی به کار می‌بریم: ابتدا، مقدمات را صادق و نتیجه را کاذب می‌گیریم:

وضع مقدم:	وضع تالی:
$P \to Q$	$P \to Q$
$\;\;1$	$\;\;1$
P	Q
1	1
———	———
Q	P
0	0

چون ارزش P و Q مشخص شده است، ارزش آنها را، در سطر اول، می‌نویسیم:

$$\begin{array}{ccc} P\to Q & \qquad & P\to Q \\ 0\;1\;1 & & 1\;1\;0 \end{array}$$

در استدلال سمت راست، چون مقدم، صادق و تالی، کاذب است کل شرطی باید کاذب باشد یعنی

$$\begin{array}{ccc} P & \to & Q \\ 1 & \underline{1,0} & 0 \end{array}$$

اما این تناقض است و از این رو، استدلال وضع مقدم، معتبر است.

در استدلال سمت چپ هیچ تناقضی نیست و ارزش‌دهی هم کامل شده است پس استدلال نامعتبر است و مثال نقض آن عبارت است از:

P	Q
1	0

مثال دیگر:

اول:	⇐ دوم:	⇐ سوم:	⇐ چهارم:	⇐ پنجم:	⇐ ششم:	⇐ هفتم:
$P \to Q$	$P \to Q$	$P \to Q$	$P \to Q$	$P \to Q$	$P \to Q$	استدلال
1	1	1 0	0 1 0	0 1 0	0 1 0	معتبر
$R \to S$	$R \to S$	$R \to S$	$R \to S$	$R \to S$	$R \to S$	است و
1	1	1 0	0 1 0	0 1 0	0 1 0	مثال
$P \vee R$	$P \vee R$	$P \vee R$	$P \vee R$	$P \vee R$	$P \vee R$	نقض
1	1	1	1	0 1 0	0 1,0 0	ندارد
$Q \vee S$	$Q \vee S$	$Q \vee S$	$Q \vee S$	$Q \vee S$	$Q \vee S$	
0	000	000	000	000	000	

مثال سوم:

اول:	⇐ دوم:	⇐ سوم:	⇐ چهارم:	⇐ پنجم:
$P \leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	استدلال نامعتبر است و
1	0 1	0 1 0	0 1 0	مثال نقض دارد:
$Q \to R$	$Q \to R$	$Q \to R$	$Q \to R$	
1	1 1	1 1	0 1 1	
R	R	R	R	
1	1	1	1	
P	P	P	P	
0	0	0	0	

PQR
0 0 1

تمرین

۱. قواعد زیر در منطق قدیم شناخته شده بودند. آنها را با روش ارزش‌دهی اثبات کنید:

قیاس استثنایی

قیاس استثنایی متصل				قیاس استثنایی منفصل			
رفع مقدم	وضع تالی	رفع تالی	وضع مقدم	حذف	مانع خلو	حذف	مانع جمع
$P\leftarrow Q$ $\sim P$ ——— $\sim Q$	$P\leftarrow Q$ Q ——— P	$P\rightarrow Q$ $\sim Q$ ——— P	$P\rightarrow Q$ P ——— Q	$P\vee Q$ $\sim Q$ ——— P	$P\vee Q$ $\sim P$ ——— Q	$P\uparrow Q$ Q ——— $\sim P$	$P\uparrow Q$ P ——— $\sim Q$
				حذف دوفصلی			
$P\leftrightarrow Q$ $\sim P$ ——— P	$P\leftrightarrow Q$ Q ——— P	$P\leftrightarrow Q$ $\sim Q$ ——— P	$P\leftrightarrow Q$ P ——— Q	$P\updownarrow Q$ $\sim Q$ ——— P	$P\updownarrow Q$ $\sim P$ ——— Q	$P\updownarrow Q$ Q ——— $\sim P$	$P\updownarrow Q$ P ——— $\sim Q$

قیاس اقترانی یا تعدی شرطی

قیاس مقسم	قیاس مرکب موصول	قیاس مرکب مفصول	شکل اول	شکل دوم	شکل سوم	شکل چهارم
$P\vee Q\vee R\vee S$ $P\rightarrow T$ $Q\rightarrow T$ $R\rightarrow T$ $S\rightarrow T$ ——— T	$P\rightarrow Q$ $R\rightarrow S$ $Q\rightarrow R$ $S\rightarrow T$ ——— ——— $P\rightarrow R$ $R\rightarrow T$ —————— $P\rightarrow T$	$P\rightarrow Q$ $Q\rightarrow R$ $R\rightarrow S$ $S\rightarrow T$ ——— $P\rightarrow T$	$P\rightarrow Q$ $Q\rightarrow R$ ——— $P\rightarrow R$	$P\leftrightarrow Q$ $R\leftrightarrow Q$ ——— $P\leftrightarrow R$	$P\leftrightarrow Q$ $P\leftrightarrow R$ ——— $Q\leftrightarrow R$	$P\leftrightarrow Q$ $R\leftrightarrow P$ ——— $Q\leftrightarrow R$

۲. مغالطات زیر در منطق قدیم شناخته شده بودند. نادرستی و عدم اعتبار آنها را اثبات کنید:

وضع تالی رفع مقدم

$P\leftarrow Q$ $\sim P$ ——— Q	$P\leftarrow Q$ Q ——— $\sim P$	$P\rightarrow Q$ Q ——— P	$P\rightarrow Q$ $\sim P$ ——— $\sim Q$	$P\vee Q$ Q ——— P	$P\vee Q$ P ——— Q	$P\uparrow Q$ Q ——— P	$P\uparrow Q$ P ——— Q
$P\leftrightarrow Q$ $\sim P$ ——— $\sim P$	$P\leftrightarrow Q$ $\sim Q$ ——— $\sim P$	$P\leftrightarrow Q$ Q ——— $\sim P$	$P\leftrightarrow Q$ P ——— $\sim Q$	$P\updownarrow Q$ $\sim Q$ ——— $\sim P$	$P\updownarrow Q$ $\sim P$ ——— $\sim Q$	$P\updownarrow Q$ Q ——— P	$P\updownarrow Q$ P ——— Q

۳. قواعد زیر را منطق جدید کشف کرده است. درستی آن‌ها را ثابت کنید:

K′	پارادوکس مثبت		معرفی مانع خلو	
$\begin{array}{c} P \\ \hline Q\to Q \end{array}$	$\begin{array}{c} Q \\ \hline P\to Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P \\ \hline P\leftarrow Q \end{array}$	$\begin{array}{c} Q \\ \hline P\vee Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P \\ \hline P\vee Q \end{array}$
EFQ	پارادوکس منفی		معرفی مانع جمع	
$\begin{array}{c} P \\ \sim P \\ \hline Q \end{array}$	$\begin{array}{c} \sim Q \\ \hline P\leftarrow Q \end{array}$	$\begin{array}{c} \sim P \\ \hline P\to Q \end{array}$	$\begin{array}{c} \sim Q \\ \hline P\uparrow Q \end{array}$	$\begin{array}{c} \sim P \\ \hline P\uparrow Q \end{array}$

معرفی ناری	معرفی آرین	معرفی نیا	معرفی عاطف	معرفی نقض مضاعف
$\begin{array}{c} \sim P \\ Q \\ \hline P<Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P \\ \sim Q \\ \hline P>Q \end{array}$	$\begin{array}{c} \sim P \\ \sim Q \\ \hline P\downarrow Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline P\wedge Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P \\ \hline \sim\sim P \end{array}$
حذف ناری	حذف آرین	حذف نیا	حذف عاطف	حذف نقض مضاعف
$\begin{array}{c} P<Q \\ \hline \sim P \\ Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P>Q \\ \hline P \\ \sim Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P\downarrow Q \\ \hline \sim P \\ \sim Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P\wedge Q \\ \hline P \\ Q \end{array}$	$\begin{array}{c} \sim\sim P \\ \hline P \end{array}$

عطف دو تالی:	فصل دو مقدم:	قیاس ذوحدین:	شرطی و دوفصلی:	شرطی و مانع خلو:	شرطی و مانع جمع:
$\begin{array}{c} P\to Q \\ P\to R \\ \hline\hline P\to(Q\wedge R) \end{array}$	$\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to Q \\ \hline\hline (P\vee R)\to Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ \hline (P\vee R)\to(Q\vee S) \end{array}$	$\begin{array}{c} P\to Q \\ P\updownarrow Q \\ \hline\hline \sim P\wedge Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P\to Q \\ P\vee Q \\ \hline\hline Q \end{array}$	$\begin{array}{c} P\to Q \\ P\uparrow Q \\ \hline\hline \sim P \end{array}$
عطف دو تالی: $\begin{array}{c} (P\to Q)\wedge(P\to R) \\ \hline\hline P\to(Q\wedge R) \end{array}$	فصل دو مقدم: $\begin{array}{c} (P\to Q)\wedge(R\to Q) \\ \hline\hline (P\vee R)\to Q \end{array}$	قیاس ذوحدین: $\begin{array}{c} (P\to Q)\wedge(R\to S) \\ \hline (P\vee R)\to(Q\vee S) \end{array}$	وضع دو مقدم: $\begin{array}{c} (P\to Q)\wedge(R\to S) \\ \hline (P\wedge R)\to(Q\wedge S) \end{array}$	$\begin{array}{l} P \\ \hline Q\to P \\ \sim P\to Q \\ P\vee Q \end{array}$	$\begin{array}{l} \sim P \\ \hline P\to Q \\ P\to\sim Q \\ P\uparrow Q \end{array}$

رفع تالی در تالی:	وضع مقدم در تالی:	صدور:	پخش‌پذیری:	پخش‌پذیری:
$\begin{array}{l} P\to(Q\to R) \\ P\to\sim R \\ \hline P\to\sim Q \end{array}$	$\begin{array}{l} P\to(Q\to R) \\ P\to Q \\ \hline P\to R \end{array}$	$\begin{array}{c} P\to(Q\to R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\to R \end{array}$	$\begin{array}{c} P\wedge(Q\vee R) \\ \hline (P\wedge Q)\vee(P\wedge R) \end{array}$	$\begin{array}{c} (P\vee Q)\wedge(P\vee R) \\ \hline P\vee(Q\wedge R) \end{array}$

۴. اعتبار استدلال‌های زیر را اثبات کنید:

1. $\begin{array}{l} P \\ \hline (P\to Q)\to(P\leftrightarrow Q) \end{array}$

2. $\begin{array}{l} (P\to Q)\to P \\ \hline P \end{array}$

3. $\begin{array}{l} P\to(R>Q) \\ \hline P\to(Q\to R) \end{array}$

4. $\begin{array}{l} (P\vee Q)\vee(R\wedge S) \\ (P>S)\wedge(P<Q) \\ \hline P<R \end{array}$

5. $\begin{array}{l} P\to(Q\to R) \\ \hline Q\to(P\to R) \end{array}$

6. $\begin{array}{l} (P\to Q)\to R \\ \hline\hline (P>Q)\vee R \end{array}$

7. $\begin{array}{l} (P\to\sim Q)\to R \\ Q\to\sim P \\ \hline R \end{array}$

8. $\begin{array}{l} (P\wedge Q)\to(P\to(R\wedge S)) \\ (P\wedge Q)\wedge M \\ \hline R\vee S \end{array}$

9. $\begin{array}{l} P \\ Q\to(R\to(P\to S)) \\ \hline R\to(Q\to S) \end{array}$

10. $\begin{array}{l} P\to Q \\ (P\wedge Q)\to R \\ P\uparrow R \\ \hline \sim P \end{array}$

11. $\begin{array}{l} P\to Q \\ R\to S \\ Q\uparrow S \\ \hline P\uparrow R \end{array}$

12. $\begin{array}{l} P\to (R\to S) \\ \sim Q\to \sim S \\ \hline (P\to R)\to (P\to Q) \end{array}$

13. $\begin{array}{l} (P\vee Q)\to (R\to S) \\ (\sim S\vee F)\to (P\wedge R) \\ \hline S \end{array}$

14. $\begin{array}{l} P\vee (Q\wedge R) \\ P\to R \\ \hline R \end{array}$

15. $\begin{array}{l} P\to (Q\to R) \\ Q\to (R\to S) \\ \hline P\to (Q\to S) \end{array}$

16. $\begin{array}{l} \sim S\to (Q>R) \\ (P\wedge Q)\to R \\ \hline P\to S \end{array}$

17. $\begin{array}{l} (P\to Q)\wedge (R\to S) \\ W\to (P\vee R) \\ \hline W\to (Q\vee S) \end{array}$

18. $\begin{array}{l} (P\vee Q)\to (R\wedge S) \\ \sim R \\ \hline \sim Q \end{array}$

19. $\begin{array}{l} P\to Q \\ Q\to ((R\to \sim\sim R)\to S) \\ \hline P\to S \end{array}$

20. $\begin{array}{l} (P\to Q)\wedge (R\to S) \\ P\vee (R\wedge S) \\ \hline S \end{array}$

21. $\begin{array}{l} \sim P\vee ((Q\to R)\wedge (S\to R)) \\ P\wedge (Q\vee S) \\ \hline R \end{array}$

22. $\begin{array}{l} (P\vee Q)\to (R\to S) \\ \sim P\to (W\to \sim\sim W) \\ \sim R \\ \hline \sim W \end{array}$

23. $\begin{array}{l} P\to (Q\to R) \\ P\uparrow R \\ (S\to P)\wedge (X\to Q) \\ \hline S\to \sim X \end{array}$

24. $\begin{array}{l} P\to (Q\wedge \sim R) \\ (Q\vee R)\to S \\ P \\ \hline S \end{array}$

25. $\begin{array}{l} (P\to Q)\wedge (R\to S) \\ (Q\vee S)\to V \\ \sim N \\ \hline \sim (P\vee R) \end{array}$

26. $\begin{array}{l} (P\vee Q)\to (R\to S) \\ (R\vee K)\to (\sim L\wedge W) \\ (L\vee M)\to (P\wedge Z) \\ \hline \sim L \end{array}$

27. $\begin{array}{l} P\to (Q>R) \\ (S\wedge Q)\to R \\ S \\ \hline \sim P \end{array}$

28. $\begin{array}{l} P\to Q \\ S\to \sim R \\ \sim (P\wedge Q) \\ P\vee (\sim\sim R\wedge \sim\sim Q) \\ \hline S\uparrow Q \end{array}$

29. $\begin{array}{l} P\to (Q\to R) \\ P\to (S\to I) \\ P\wedge (Q\vee S) \\ \sim R \\ \hline I \end{array}$

30. $\begin{array}{l} P\leftrightarrow Q \\ M\to Q \\ (R\vee S)\to (N\wedge M) \\ R \\ \hline P \end{array}$

نقص روش ارزش‌دهی

روش ارزش‌دهی، با بیان پیشین، یک نقص و کاستی مهم دارد. این کاستی را در بیان قواعد ۲ و ۳ می‌توان مشاهده کرد:

۳. اگر به تناقض برسیم معنایش این است که فرض ما نادرست بوده و استدلال معتبر است؛

۴. اگر همه فرمول‌ها، بدون تناقض، ارزش‌دهی شوند استدلال نامعتبر است؛

در اینجا، دو حالت از سه حالت بررسی شده است: الف: به تناقض برسیم، ب: به تناقض نرسیم و همه فرمول‌ها ارزش‌دهی شوند و ج: به تناقض نرسیم و همه فرمول‌ها را نتوان ارزش‌دهی کرد. حکمِ حالت‌های الف و ب را قاعده‌های ۳ و ۴ بیان کرده‌اند اما برای حالت ج، قاعده‌ای بیان نشده است و ما ناگزیریم قاعده‌ای برای آن معرفی کنیم. پیش از بیان قاعده مربوط به حالت ج، ابتدا، نمونه‌ای برای این حالت ذکر می‌کنیم. استدلال زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ Q\rightarrow P \\ \hline P\leftrightarrow Q \end{array}$$

با صادق در نظر گرفتن مقدمات و کاذب گرفتن نتیجه این استدلال، به وضعیت زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ 1 \\ Q\rightarrow P \\ 1 \\ \hline P\leftrightarrow Q \\ 0 \end{array}$$

در این وضعیت، هیچ یک از داده‌های استدلال نمی‌تواند ارزش فرمول‌های فاقد ارزش را تعیین کند و هیچ تناقضی نیز دیده نمی‌شود. ما به وضعیت ج رسیده‌ایم: به تناقض نرسیده‌ایم و همه فرمول‌ها را نیز نمی‌توانیم ارزش‌دهی کنیم. بناچار، قاعده‌ای برای این حالت و حالت‌های مشابه بیان می‌کنیم:

قاعده بازنویسی:

۶. اگر به تناقض نرسیم و همه فرمول‌ها را نیز نتوان ارزش‌دهی کرد

۶-۱. استدلال و همه ارزش‌های موجود در آن را بازنویسی کرده، آن را «نسخه دوم» می‌نامیم و

۶-۲. یکی از فرمول‌های فاقد ارزش را، به دلخواه، انتخاب می‌کنیم و

۶-۳. آن فرمول را در نسخه اول، صادق و در نسخه دوم، کاذب می‌گیریم و

۶-۴. قواعد ارزش‌دهی را برای هر دو نسخه اعمال می‌کنیم؛

بنا به قاعده ۶-۴،

الف: اگر هر دو نسخه به تناقض برسد استدلال معتبر است؛

ب: اگر در یکی یا هر دو نسخه، همه فرمول‌ها، بدون تناقض، ارزش‌دهی شوند استدلال نامعتبر است؛

ج: اگر در یکی از دو نسخه، به تناقض نرسیم و همه فرمول‌ها را نیز نتوان ارزش‌دهی کرد قاعده ۶ را بر آن اعمال می‌کنیم.

در مثال بالا، P را انتخاب کرده، استدلال را بازنویسی می‌کنیم و P را در یک نسخه، صادق و در نسخه دیگر، کاذب می‌گیریم:

P→Q	P→Q
1 1	0 1
Q→P	Q→P
1	1
——	——
P↔Q	P↔Q
0	0

اکنون قواعد را در هر دو نسخه به کار می‌بریم و به نمودار زیر می‌رسیم:

P→Q	P→Q
1 1 1	0 1 0
Q→P	Q→P
1 1 1	0 1 0
——	——
P↔Q	P↔Q
1 10 1	0 10 0

چون در هر دو نسخه، به تناقض رسیدیم، استدلال معتبر است. اکنون استدلال دیگری را بیازماییم:

مثال دوم:

$$\begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ Q\rightarrow P \\ \hline P\wedge Q \end{array}$$

با صادق در نظر گرفتن مقدمات و کاذب گرفتن نتیجه این استدلال، به وضعیت زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ 1 \\ Q\rightarrow P \\ 1 \\ \hline P\wedge Q \\ 0 \end{array}$$

در این مثال، P را انتخاب کرده، استدلال را بازنویسی می‌کنیم و P را در یک نسخه، صادق و در نسخه دیگر، کاذب می‌گیریم:

$$\begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ 1\ 1 \\ Q\rightarrow P \\ 1 \\ \hline P\wedge Q \\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ 0\ 1 \\ Q\rightarrow P \\ 1 \\ \hline P\wedge Q \\ 0 \end{array}$$

اکنون قواعد را در هر دو نسخه به کار می‌بریم و به نمودار زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ 1\ 1\ 1 \\ Q\rightarrow P \\ 1\ 1\ 1 \\ \hline P\wedge Q \\ 1\ 10\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\rightarrow Q \\ 0\ 1\ 0 \\ Q\rightarrow P \\ 0\ 1\ 0 \\ \hline P\wedge Q \\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

چون در یک نسخه، به تناقض نرسیدیم و همه فرمول‌ها ارزش‌دهی نشدند، استدلال نامعتبر است. آشکار است که اگر این وضعیت در هر دو نسخه برقرار شود استدلال نامعتبر است. اکنون استدلالی را بیازماییم که در آن، دو بار قاعده بازنویسی به کار برود:

مثال سوم:

$$\frac{P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R)}{(P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R}$$

با صادق در نظر گرفتن مقدمات و کاذب گرفتن نتیجه این استدلال، به وضعیت زیر می‌رسیم:

P↔(Q↔R)
1

(P↔Q)↔R
1 0

در این مثال، P را انتخاب کرده، استدلال را بازنویسی می‌کنیم و P را در یک نسخه، صادق و در نسخه دیگر، کاذب می‌گیریم:

P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)
1 1	0 1
(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R
1 0	1 0

اکنون قواعد را در هر دو نسخه به کار می‌بریم و به نمودار زیر می‌رسیم:

P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)
1 1 1	0 1 0
(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R
1 0	1 0

از آنجا که ارزش فرمول‌ها را نمی‌توان تعیین کرد ناچاریم قاعده ۶ را در هر دو نسخه به کار ببریم. در اینجا، Q را انتخاب کرده، استدلال را بازنویسی می‌کنیم و Q را در یک نسخه، صادق و در نسخه دیگر، کاذب می‌گیریم:

نسخه ۱-۱	نسخه۱-۲	نسخه ۲-۱	نسخه ۲-۲
P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)	P↔(Q↔R)
1 1 1 1	1 1 0 1	0 1 1 0	0 1 0 0
(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R	(P↔Q)↔R
1 1 0	1 0 0	1 1 0	1 0 0

اکنون قواعد را در هر چهار نسخه به کار می‌بریم و به نمودار زیر می‌رسیم:

$$\begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ 1\,1\ \ 1\,1\,1 \\ \hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ 1\ 1\ \ 1\ 01\ 1 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ 1\,1\ \ 0\,1\,0 \\ \hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ 1\ 0\ 0\ \ 01\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ 0\,1\ \ 1\,0\,0 \\ \hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ 1\ 1\,1\ 01\ 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ 0\,1\ 0\ 0\ 1 \\ \hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ 1\,1\ 0\ \ 01\ 1 \end{array}$$

چون در همه نسخه‌ها، به تناقض رسیدیم، استدلال معتبر است. خوانندهٔ آشنا با نظام‌های منطقی به روش استنتاج طبیعی یا نموداری را دعوت می‌کنیم تا استدلال بالا را در آن نظام‌ها ثابت کرده، سرعت خیره کنندهٔ روش ارزش‌دهی را خود مشاهده کند.

تمرین:

۵. اعتبار استدلال‌های زیر را اثبات کنید:

1. $$\begin{array}{c} P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(Q\to P) \end{array}$$

2. $$\begin{array}{c} P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline (P\wedge Q)\vee(\sim P\wedge\sim Q) \end{array}$$

3. $$\begin{array}{c} P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline (P\wedge Q)\vee(P\downarrow Q) \end{array}$$

4. $$\begin{array}{c} P\to Q \\ Q\to P \\ \hline\hline P\leftrightarrow Q \end{array}$$

5. $$\begin{array}{c} P\updownarrow Q \\ \hline\hline (P\vee Q)\wedge(Q\uparrow P) \end{array}$$

6. $$\begin{array}{c} P\updownarrow Q \\ \hline\hline (P\wedge\sim Q)\vee(\sim P\wedge Q) \end{array}$$

7. $$\begin{array}{c} P\updownarrow Q \\ \hline\hline (P>Q)\vee(P<Q) \end{array}$$

8. $$\begin{array}{c} P\vee Q \\ Q\uparrow P \\ \hline\hline P\updownarrow Q \end{array}$$

9. $$\begin{array}{c} P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline P\updownarrow\sim Q \\ \hline\hline \sim P\updownarrow Q \\ \hline\hline \sim(P\updownarrow Q) \end{array}$$

10 $$\begin{array}{c} P\updownarrow Q \\ \hline\hline P\leftrightarrow\sim Q \\ \hline\hline \sim P\leftrightarrow Q \\ \hline\hline \sim(P\leftrightarrow Q) \end{array}$$

11 $$\begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ \hline\hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \\ \hline\hline (P\updownarrow Q)\updownarrow R \\ \hline\hline P\updownarrow(Q\updownarrow R) \end{array}$$

12 $$\begin{array}{c} P\wedge(Q\wedge R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\wedge R \end{array} \qquad \begin{array}{c} (P\vee Q)\vee R \\ \hline\hline P\vee(Q\vee R) \end{array}$$

13 $$\begin{array}{c} P\vee(Q\wedge R) \\ \hline\hline (P\vee Q)\wedge(P\vee R) \end{array}$$

14 $$\begin{array}{c} P\wedge(Q\vee R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\vee(P\wedge R) \end{array}$$

15 $$\begin{array}{c} P\to Q \\ \hline\hline P\to(P\wedge Q) \end{array}$$

16 $$\begin{array}{c} (P\uparrow Q)\to R \\ \hline\hline (P\vee R)\wedge(Q\vee R) \end{array}$$

17 $$\begin{array}{c} P\to(Q\wedge R) \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(P\to R) \end{array}$$

18 $$\begin{array}{c} (P\vee Q)\to R \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(Q\to R) \end{array}$$

19 $$\begin{array}{c} P\to(Q\vee R) \\ \hline\hline (P\to Q)\vee(P\to R) \end{array}$$

20 $$\begin{array}{c} (P\wedge Q)\to R \\ \hline\hline (P\to Q)\vee(Q\to R) \end{array}$$

21 $$\begin{array}{c} P\vee(Q\to P) \\ Q\vee(P\to Q) \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(Q\to P) \end{array}$$

22 $$\begin{array}{c} (P\vee Q)\to R \\ S\to(T\wedge U) \\ \hline (P\to Q)\wedge(S\to T) \end{array}$$

23 $$\begin{array}{c} P\wedge(Q\vee R) \\ (P\wedge R)\to(S\downarrow T) \\ (S\uparrow T)\to(P\uparrow Q) \\ \hline S\leftrightarrow T \end{array}$$

24

۶. کدام یک از استدلال‌های زیر نامعتبر است؟ برای آن‌ها مثال نقض ارائه کنید:

1. $\begin{array}{l} P\to Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$

2. $\begin{array}{l} P\vee Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$

3. $\begin{array}{l} P\updownarrow Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$

4. $\begin{array}{l} P\wedge Q \\ \sim P \\ \hline \sim Q \end{array}$

5. $\begin{array}{c} (P\wedge Q)\to R \\ \hline\hline (P\to Q)\wedge(Q\to R) \end{array}$

6. $\begin{array}{c} (P\vee Q)\to R \\ \hline\hline (P\to Q)\vee(Q\to R) \end{array}$

7. $\begin{array}{c} P\to(Q\to R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\to R \end{array}$

8. $\begin{array}{c} P\uparrow (Q\uparrow R) \\ \hline\hline P\to(Q\wedge R) \end{array}$

9. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ P\updownarrow R \\ \hline Q\vee S \end{array}$

10. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ P\updownarrow R \\ \hline Q\uparrow S \end{array}$

11. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ P\updownarrow R \\ \hline Q\updownarrow S \end{array}$

12. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ P\updownarrow R \\ \hline Q\wedge S \end{array}$

13. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ Q\updownarrow R \\ \hline P\vee R \end{array}$

14. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ Q\updownarrow R \\ \hline P\uparrow R \end{array}$

15. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ Q\updownarrow R \\ \hline P\updownarrow S \end{array}$

16. $\begin{array}{c} P\to Q \\ R\to S \\ Q\updownarrow R \\ \hline P\wedge S \end{array}$

17. $\begin{array}{c} P\leftrightarrow(Q\leftrightarrow R) \\ \hline\hline (P\leftrightarrow Q)\leftrightarrow R \end{array}$

18. $\begin{array}{c} (P\to Q)\to R \\ \hline\hline P\to (Q\to R) \end{array}$

19. $\begin{array}{c} P\uparrow (Q\uparrow R) \\ \hline\hline (P\uparrow Q)\uparrow R \end{array}$

20. $\begin{array}{c} (P\updownarrow Q)\updownarrow R \\ \hline\hline P\updownarrow (Q\updownarrow R) \end{array}$

21. $\begin{array}{c} P\wedge(Q\wedge R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\wedge R \end{array}$

22. $\begin{array}{c} (P\wedge Q)\vee R \\ \hline\hline P\wedge (Q\vee R) \end{array}$

23. $\begin{array}{c} P\wedge(Q\vee R) \\ \hline\hline (P\wedge Q)\vee R \end{array}$

24. $\begin{array}{c} (P\vee Q)\vee R \\ \hline\hline P\vee (Q\vee R) \end{array}$

25. $\begin{array}{c} \sim(P\wedge Q) \\ \hline \sim P\wedge\sim Q \end{array}$

26. $\begin{array}{c} \sim(P\wedge Q) \\ \hline \sim P\vee\sim Q \end{array}$

27. $\begin{array}{c} \sim(P\vee Q) \\ \hline \sim P\wedge\sim Q \end{array}$

28. $\begin{array}{c} \sim(P\vee Q) \\ \hline \sim P\vee\sim Q \end{array}$

روش ارزش‌دهی را ای. جی. هیوز و ام. جی. کرسوِل ۱۹۹۶ در منطق موجهات معرفی کرده‌اند و نگارنده آن را، با تغییرات لازم، برای منطق گزاره‌ها و سورها به کار برده است. روش‌های نموداری که در اساس، شبیه این روش هستند و برهان خلف را به کار می‌گیرند، به جای ارزش‌های 1 و 0، فرمول‌های عطفیِ مقدمه و نقیض نتیجه را تجزیه و فرمول‌های فصلی را دوشاخه کرده و در صورت یافتن تناقض در همه شاخه‌ها، استدلال را نامعتبر اعلام می‌کنند. کندی و تعداد مراحل کار در روش نموداری، به طرز کاملا محسوسی، بیشتر از روش ارزش‌دهی است. در ایران، روش نموداری را ضیاء موحد ۱۳۶۸ و لطف اله نبوی ۱۳۷۷ و پیش از آن‌ها، ویلفرید هاجز به ترجمه عبدالحسین آذرنگ به نام «راهی نو در منطق» در سال ۱۳۶۴ و ریچارد جفری به ترجمه پرویز پیر به نام «قلمرو و مرزهای منطق صوری» در سال ۱۳۶۷معرفی کرده‌اند.

روش ارزش‌دهی، مانند روش نموداری، روشی مکانیکی است و با مراحلی متناهی به پایان می‌رسد و از این جهت، نیروی ابتکار و خلاقیت ذهن را به کار نمی‌گیرد. این دو روش برای مبتدیان و نیز برای علاقه‌مندان به «منطق ریاضی» و برنامه‌نویسان رایانه‌ای مطلوب است اما برای علاقه‌مندان به «منطق فلسفی»، کاری کسل‌کننده و بی‌روح به نظر می‌رسد. از این رو، منطق‌دانان، روش‌های دیگری به نام «روش استنتاج طبیعی» را ابداع کرده‌اند که شباهت بسیاری به عملکرد ذهن دارد و از این رو، در کتاب‌های منطق فلسفی، بیشترین توجه به آنها معطوف شده است.

پرکاربردترین این روش‌ها از آنِ ای. جی. لمون از انگلیس ۱۹۵۶، فردریک فیچ از امریکا ۱۹۵۲ و گرهارد گنتزن از آلمان ۱۹۳۴ است. به دلیل همین پراکندگی جغرافیایی پدیدآورندگان این روش‌ها است که این سه روش، به ترتیب، در انگلستان، امریکا و اروپای قاره‌ای محبوبیت یافته‌اند. این سه روش را در ایران، به ترتیب ضیاء موحد ۱۳۶۸، لطف اله نبوی ۱۳۷۷ و محمد اردشیر ۱۳۸۳ به کار برده‌اند. ما ترکیبی از روش اول و دوم را در فصل بعد خواهیم آورد.

گنتزن ۱۹۳۴ روش دیگری را نیز ابداع کرده است که «حساب رشته‌ها» نامیده می‌شود و نباید با روش استنتاج طبیعی گنتزن اشتباه گرفته شود. اردشیر ۱۳۸۳ حساب رشته‌ها را نیز به جامعه فارسی زبانان معرفی کرده است.

روش استنتاج	سمانتیکی	جدول ارزش	لودویک ویتگنشتاین	ماتریسی	بسیار طولانی و کند	مکانیکی
		نموداری	ریچارد جفری و ویلفرید هاجز	ترتیب درختی	کوتاه و سریع	مکانیکی
		ارزش‌دهی	ای. جی. هیوز و ام. جی. کرسوِل	ترتیب درختی	بسیار کوتاه و سریع	
	برهانی	استنتاج طبیعی	ای. جی. لمون	ترتیب خطی و شماره فرض‌ها	آسان	نیازمند اندیشه و خلاقیت و غیر مکانیکی
			فردریک فیچ	ترتیب خطی و برهانک‌ها	نسبتا آسان	
			گرهارد گنتزن	ترتیب درختی و برهانک‌ها	بسیار آسان	
		حساب رشته‌ها	گرهارد گنتزن	ترتیب درختی و برهانک‌ها	پیچیده	
		منطق نمایش	نوئل بلنپ	ترتیب درختی و برهانک‌ها	بسیار پیچیده	
		اصل موضوعی	اقلیدس و هیلبرت اسپینوزا فرگه، راسل، وایتهد و بسیاری دیگر	در هندسه در علم اخلاق در منطق جدید	بسیار پیچیده	

شماره	عنوان	نویسنده	مترجم	ناشر	سال
۱.	راهی نو در منطق	ویلفرید هاجز	عبدالحسین آذرنگ	؟؟	۱۳۶۴
۲.	قلمرو و مرزهای منطق صوری	ریچارد جفری	پرویز پیر	علمی و فرهنگی	۱۳۶۶
۳.	درآمدی به منطق جدید	ضیاء موحد	–	علمی و فرهنگی	۱۳۶۸
۴.	مبانی منطق جدید	لطف اله نبوی	–	سمت	۱۳۷۷
۵.	منطق ریاضی	محمد اردشیر	–	هرمس	۱۳۸۳

6.	**Symbolic logic**	**F. Fitch**		**Ronald Press (New york)**	**1952**
7.	Beginning Logic	E.J. Lemmon		Nelson (London)	1956
8.	The collected papers,1969 pp.68-131	G. Gentzen	Ed. M. E. Szabo	North Holand Publishing co. (Amsterdam)	1934
9.	'Display Logic'	N. Belnap		*Journa of Philosophical Logic*, 11, pp.375-417	1982
10.	A New Introduction to Modal Logic	G. E. Hughes M. J.Cresswell		Routlage (London& New York)	1996
11.					